

## 補足説明

(2008年7月20日)

### 1.1 (p.2)(p.15) 式 (1.4) や式 (3.1) に関連して、電界がベクトルポテンシャルの時間変化の項無しに、電位のみから導ける場合の例

Case A 電磁界の波動方程式の電界ベクトルに対応する式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (1)$$

と書ける。

ここで波長程度の長さの間の電界の変化が非常に激しいときには、上式の右辺を左辺に比べて無視できる。すなわち電界ベクトルはスカラーポテンシャルから導ける。

Case B  $z$  方向に電磁波が伝搬するとき、例えば、マイクロ波導波管、同軸ケーブル、進行波管の場合を考える [2]。

電界ベクトルと磁界ベクトルを  $z$  方向に直角な成分と平行な成分に分ける。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + z_o E_z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + z_o H_z. \quad (2)$$

ここで  $z_o$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。同様に

$$\nabla = \nabla_t + z_o \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t - \Gamma z_o. \quad (3)$$

ここで電磁界は  $z$  方向に  $\Gamma$  の伝搬定数を持つ、すなわち全ての量が  $e^{-\Gamma z}$  で変化していると仮定。

上式を Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (4)$$

に代入し、 $c^2 = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 、 $k^2 = \omega^2/c^2$  とおいて整理すると

$$-j\omega\mu H_z = z_o(\nabla_t \times \mathbf{E}_t), \quad (5)$$

$$j\omega\varepsilon E_z + J_z = z_o(\nabla_t \times \mathbf{H}_t), \quad (6)$$

$$(\Gamma^2 + k^2)\mathbf{E}_t = j\omega\mu(z_o \times \nabla_t H_z) - \Gamma\nabla_t E_z + j\omega\mu\mathbf{J}_t, \quad (7)$$

$$(\Gamma^2 + k^2)\mathbf{H}_t = -j\omega\varepsilon(z_o \times \nabla_t E_z) - \Gamma\nabla_t H_z + \Gamma(z_o \times \mathbf{J}_t). \quad (8)$$

ただし、添え字  $t$  は  $z$  に垂直な成分すなわち  $x, y$  成分であるから、

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (9)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (10)$$

ビーム電流が  $z$  方向のみとし、さらに磁界ベクトルの  $z$  方向成分が無い  $E$  モードのとき

$$|\Gamma|^2 \gg k^2, \quad v \ll c \quad (11)$$

$$\nabla_t H_z = 0 \quad (12)$$

が成立していると (6) は

$$\Gamma^2 \mathbf{E}_t = -\Gamma \nabla_t E_z. \quad (13)$$

ここで

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Gamma \varphi \quad (14)$$

とおくと

$$\mathbf{E}_t = -\nabla_t \varphi \quad (15)$$

すなわち電界はスカラーポテンシャルから導ける。次に

$$\Gamma^2 + k^2 = 0 \quad \text{または} \quad v = c \quad (16)$$

のときは、主モード (同軸線路の最低次モード) であり

$$E_z = H_z = 0 \quad (17)$$

これを (4) に代入すると

$$\nabla_t \mathbf{E}_t = 0 \quad (18)$$

$\mathbf{E}_t$  がスカラーポテンシャルから導ける。

## 1.2 (p.3) 式 (1.13) の導出

式 (1.11) の両辺に  $v dt$  をスカラー的に乗ずると右辺第二項はゼロで  $-e \mathbf{E} v dt = -e \mathbf{E} d\mathbf{r} = d(e\phi)$  に等しい。左辺は

$$v d\mathbf{p} = m_0 v d \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = m_0 \frac{v d\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 \mathbf{v} \cdot \frac{dv/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \quad (19)$$

$v dv = (1/2) dv^2 = (1/2) dv^2 = v dv$  を用いて

$$\begin{aligned} &= m_0 v d\mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \mathbf{v} \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{2/3}} \right) \\ &= m_0 v d\mathbf{v} \frac{1 - v^2/c^2 + v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= m_0 v d\mathbf{v} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= m_0 d \frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

これと上記の  $d(e\phi)$  と等置し、速度ゼロでの電位を  $\phi_0$  として積分すると

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = e(\phi - \phi_0) \quad (21)$$

### 3.1 (p15) 磁位について

式 (3.2) にあるように、磁位  $\psi$  (単位は A ターン) の微分を磁界強度と定義するのが国際標準である。「ナノ電子光学」では  $\psi$  (単位は Wb/m) を p.20 の最下段にあるように、磁位に真空中の透磁率を乗じたものと再定義している。

$\psi$  は、このテキストの前身の「電子・イオンビーム光学」1994 では磁位と記述して、その勾配が磁束密度としていた。これは Glaser の教科書 [3] などドイツ人達の定義であった。

### 3.2 (p.18) (3.14) の導出

回転対称系における電 (磁) 位のべき級数展開

テキスト式 (3.13) を式 (3.12) に代入し、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z) r^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(z) r^n = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z) r^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(z) r^n = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n(z) r^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(z) r^n = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n(z) r^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(z) r^n = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n(z) r^{n-2} + a_n''(z) r^n) = 0 \quad (6)$$

$r$  の同じべきの項が互いに独立にゼロの必要。項を書き並べると、

$$0^2 a_0 r^{-2} + a_0'' r^0 \quad (7)$$

$$+ 1^2 a_1 r^{-1} + a_1'' r^1 \quad (8)$$

$$+ 2^2 a_2 r^0 + a_2'' r^2 \quad (9)$$

$$+ 3^2 a_3 r^1 + a_3'' r^3 \quad (10)$$

$$+ 4^2 a_4 r^2 + a_4'' r^4 \quad (11)$$

$$\dots \quad (12)$$

$$+ n^2 a_n r^{n-2} + a_n'' r^n \quad (13)$$

$$\dots \quad (14)$$

(7) 式で  $r = 0$  のときにもゼロになるために、 $a_0 = 0$ 。より、 $r^{-1}$  の係数  $a_1 = 0$  で、

$$r^{n-2} (n^2 a_n + a_{n-2}'') = 0 \quad (15)$$

であるから、

$$n^2 a_n + a''_{n-2} = 0, (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (16)$$

より、(3.14) が導出できる。この導出過程において、 $a_{-2}$  や  $a_{-1}$  がでてくるが、(6) の和の下限は本来、 $n = -\infty$  から始まるが、 $r = 0$  で電位有限のために  $n$  が負の係数はゼロとなり、初項が  $n = 0$  から始まる。(15) で  $n = 1$  とおくと  $a_1 = 0$  すなわち奇数べき項はゼロ。

### 3.3 (p.20) 式 (3.23) の導出

テキスト式 (3.22) に  $m = 0, 1, 2, \dots$  のとき、 $k$  を変えて代入して係数を定める。 $k = -\infty$  から始まるが、 $r = 0$  で発散するため、 $k$  は負の値をとらない。従って、 $a_{m,-2} = a_{m,-1} = 0$ 。

$m = 0$  のとき

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad a''_{0,-2} = 0 \\ k = 1 & \quad a_{0,1} + a''_{0,-1} = 0 \quad a_{0,1} = 0 \text{ 以降、} k \text{ が奇数のとき } a_{0,k} = 0 \\ k = 2 & \quad 4a_{0,2} + a''_{0,0} = 0 \quad a_{0,2} = -a''_{0,0}/4 \\ k = 3 & \quad 9a_{0,3} + a''_{0,1} = 0 \quad a_{0,3} = 0 \\ k = 4 & \quad 16a_{0,4} + a''_{0,2} = 0 \quad a_{0,4} = -a''_{0,2}/16 \end{aligned}$$

$$\phi(r, \varphi, z) = a_{0,0} - \frac{a''_{0,2}}{4} r^2 + \frac{a''''_{0,4}}{64} r^4 + \dots \quad (17)$$

$m = 1$  のとき

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad -a_{1,0} + a''_{1,-2} = 0 \quad a_{1,0} = 0 \text{ 以降、} k \text{ が偶数のとき } a_{1,k} = 0 \\ k = 1 & \quad a''_{1,-1} = 0 \\ k = 3 & \quad 8a_{1,3} + a''_{1,1} = 0 \quad a_{1,3} = -a''_{1,1}/8 \end{aligned}$$

$$\phi(r, \varphi, z) = (a_{1,1} \cos \varphi + b_{1,1} \sin \varphi) r - \frac{1}{8} (a''_{1,1} \cos \varphi + b''_{1,1} \sin \varphi) r^3 + \dots \quad (18)$$

$m = 2$  のとき

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad -4a_{2,0} + a''_{2,-2} = 0 \\ k = 1 & \quad -3a_{2,1} + a''_{2,-1} = 0 \quad a_{2,1} = 0 \\ k = 2 & \quad a''_{2,0} = 0 \\ k = 3 & \quad 5a_{2,3} + a''_{2,1} = 0 \quad a_{2,3} = 0 \text{ 以降、} k \text{ が奇数のとき } a_{2,k} = 0 \\ k = 4 & \quad 12a_{2,4} + a''_{2,2} = 0 \quad a_{2,4} = -a''_{2,2}/12 \end{aligned}$$

$$\phi(r, \varphi, z) = (a_{2,0} \cos 2\varphi + b_{2,2} \sin 2\varphi) r^2 - \frac{1}{12} (a''_{2,2} \cos 2\varphi + b''_{2,2} \sin 2\varphi) r^4 \quad (19)$$

$m = 3$  のとき

$$\begin{aligned}
 k = 0 & \quad -9a_{3,0} + a''_{3,-2} = 0 & a_{3,0} = 0 \\
 k = 1 & \quad -8a_{3,1} + a''_{3,-1} = 0 & a_{3,1} = 0 \\
 k = 2 & \quad -5a_{3,2} + a''_{3,0} = 0 & a_{3,2} = 0 \\
 k = 3 & \quad a''_{3,1} = 0 \\
 k = 4 & \quad 7a_{3,4} + a''_{3,2} = 0 & a_{3,4} = 0 \text{ 以降、} k \text{ が偶数のとき } a_{3,k} = 0
 \end{aligned}$$

$$\phi(r, \varphi, z) = (a_{3,3} \cos 3\varphi + b_{3,3} \sin 3\varphi)r^3 + \dots \quad (20)$$

$m = 4$  のとき

$$\begin{aligned}
 k = 0 & \quad -16a_{4,0} + a''_{4,-2} = 0 & a_{4,0} = 0 \\
 k = 1 & \quad -15a_{4,1} + a''_{4,-1} = 0 & a_{4,1} = 0 \\
 k = 2 & \quad -12a_{4,2} + a''_{4,0} = 0 & a_{4,2} = 0 \\
 k = 3 & \quad -7a_{4,3} + a''_{4,1} = 0 & a_{4,3} = 0 \\
 k = 4 & \quad a''_{4,2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\phi(r, \varphi, z) = (a_{4,4} \cos 4\varphi + b_{4,4} \sin 4\varphi)r^4 + \dots \quad (21)$$

よって、 $m = 0 \sim 4$  まで合わせるとテキスト式 (3.23) になる。ただし、テキストでは係数を  $a_{1,1} = \phi_{1c}$ ,  $b_{1,1} = \phi_{1s}$  などのように置き換えている。

(補足) ラプラス方程式の解を円筒座標系

$(r, \theta, z)$  において  $R(r)e^{\pm jm\theta}e^{\pm mz}$  とおくと、周知のように  $R(r)$  はベッセル微分方程式になる。係数が  $r = 0$  で正則でないから、その解は  $r = 0$  で正則な解すなわちベッセル関数  $J_m(r)$  と正則でないノイマン関数  $N_m(r)$  の一次結合で表現できる。式 (3.23) の  $r$  の展開は  $J_m(r)$  の展開式そのものである。数学解析の教科書で確認されたい。

4.1 (p.38) 式 (4.77) から式 (4.78) への変形

$$\frac{d^2 X^*}{dz^2} = -\frac{3}{16} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 X^* \quad (1)$$

$z_0 \rightarrow z_i$  で定積分して

$$\frac{dX^*}{dz} \Big|_{z_0}^{z_i} = -\frac{3}{16} \int_{z_0}^{z_i} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 X^* dz \quad (2)$$

上式の左辺は

$$(X_1^* - X_0^*)' = X_1' \Phi_1^{1/4} + X_1(1/4)\Phi_1^{-3/4}\Phi_1' - X_0' \Phi_1^{1/4} - X_0(1/4)\Phi_0^{-3/4}\Phi_0' \quad (3)$$

$z \leq z_0$ ,  $z \geq z_1$  ではレンズ界がゼロつまり無電界であるから  $\Phi_1' = \Phi_0' = 0$ 、平行入射とすると  $X_0' = 0$ ,  $X_1' = -X_0/f$  (図 4.5 参照) で、上式は

$$(X_1^* - X_0^*)' = -X_0 \Phi_1^{1/4} / f \quad (4)$$

薄肉レンズ近似では レンズ中での  $X^*$  が変化しないと仮定するから、右辺の被積分関数中の  $X^*$  は積分外に出せ、 $X_0\Phi_0^{1/4}$  とおける。右辺と左辺を等置すると

$$-X_0\Phi_1^{1/4}\frac{1}{f_i} = -\frac{3}{16}X_0\Phi_0^{1/4}\int\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 dz. \quad (5)$$

整理して、

$$\frac{1}{f_i} = \frac{3}{16}\left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right)^{1/4}\int_{z_0}^{z_i}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 dz \quad (6)$$

テキスト式 (4.45) より、

$$\frac{1}{f_i} = \frac{1}{f_0}\sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi_i}} \quad (7)$$

である。よってテキスト式 (4.78) が導出された。

#### 4.2 (p.39,40) 図 4.10 に $\tilde{G}_{IV}$ 軌道を追加した光線図 (物と像の両方が漸近結像)

像側も漸近結像になった時に図 4.10 の  $\tilde{G}_I$  軌道を  $\tilde{G}_{IV}$  軌道で置き換えて考える。したがって、図 4.10 の時と  $\tilde{f}_0$  や  $\tilde{f}_i$  の値が異なる。図 4.10 の中の  $\tilde{l}_i$  や  $z_{f_i}$  は像側が漸近結像ではないときの説明用の変数。 $\tilde{G}_{IV}$  軌道を追加した図を図 1 に示す。

結像する条件から  $\tilde{G}_{IV}(z_0) = \tilde{G}_{II}(z_0)$ ,  $\tilde{G}_{IV}(z_i) = \tilde{G}_{II}(z_i)$ ,  $\tilde{H}(z_0) = \tilde{H}(z_i) = 0$  であり、さらに、関係する式は (4.81) と (4.82)、(5.28) で、

$$\tilde{G}_{II}(-\infty) = 1, \quad \tilde{G}'_{II}(-\infty) = 0, \quad \tilde{G}'_{II}(\infty) = -\frac{1}{\tilde{f}_i} \quad (8)$$

$$\tilde{G}_{IV}(z \rightarrow \infty) = M, \quad \tilde{G}'_{IV}(z \rightarrow \infty) = 0, \quad \tilde{G}'_{IV}(-\infty) = \frac{M}{\tilde{f}_0} \quad (9)$$

$$\tilde{H} \rightarrow (z - \tilde{z}_0), \quad \tilde{G}_{IV} \rightarrow \frac{M}{\tilde{f}_0}(z - \tilde{z}_{f_0}), \quad \text{at } z \rightarrow -\infty \quad (10)$$

#### 4.3 (p.43) 式 (4.93) の導出

$|M| \gg 1$ ,  $\Theta = \pi/2$  のとき、 $z_0 = -d$ 、物面は  $z \gg 1$  より。すなわち、励磁が強いとき  $\Theta > \pi/2$  で、 $z_0 > -d$ (図 2 の赤線)。反対に、励磁が弱いとき  $\Theta < \pi/2$  で、 $z_0 < -d$ (図 2 の青線)。

#### 4.4 (p.52) 図 4.26 バイポテンシャルレンズの薄肉近似光線図

図 4.26 の近似光線図を作図する。作図に必要な式は式 (4.123) で、

$$x_2 = \frac{x_1}{\sigma}, \quad x'_2 = \frac{x'_1}{\sigma} - \frac{x_1}{f_i}, \quad x'_1 = x'_2\sigma + \frac{x_2}{f_0},$$

$$f_i = f^*\sigma, \quad f_0 = f^*/\sigma, \quad f_i/f_0 = \sigma^2, \quad f_i/\sigma = f_0\sigma = f^*, \quad \sigma = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/4} \quad (11)$$

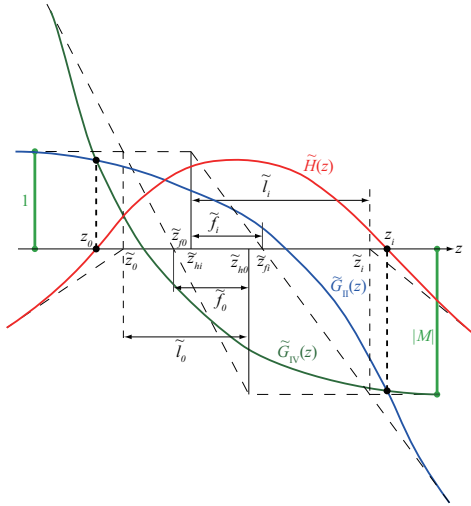


図 1 物と像の両方が漸近結像の時

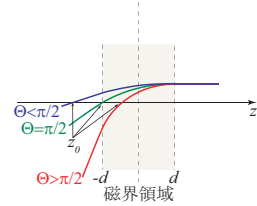


図 2 均一磁界モデルでの軌道 ( $|M| \gg 1$ )

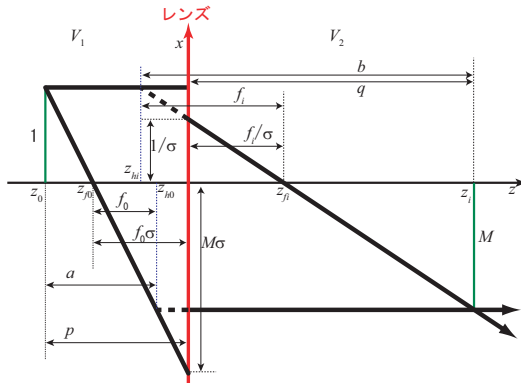


図 3 パイポテンシャルレンズの薄肉近似光線図。  $\sigma = 3/2$ ,  $|M| = 4/3$ ,  $f_i/\sigma = f_o\sigma = 1$  の時の作図。

であり、式 (4.126) や式 (4.127) で与えられるレンズ公式や倍率公式が成り立っている。

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f^*}, \quad |M| = \frac{q}{p\sigma} \quad (12)$$

作図方法は、

1.  $x = 1$  の軸に平行な直線 ( $z < 0$ )
2.  $(f_i/\sigma, 0)$  と  $(0, 1/\sigma)$  を通る直線 ( $z > 0$ )
3.  $x = -|M|$  の軸に平行な直線 ( $z > 0$ )

4.  $(-f_0\sigma, 0)$  と  $(0, -|M|\sigma)$  を通る直線 ( $z < 0$ )

を順に書く。結果を図 3 に示す。

### 5.1 (p.74) 式 (5.36) の導出

$$y = \frac{\mathbf{B}^2}{\Phi} \quad (1)$$

$$\text{両辺の log を取って、} \log y = \log \mathbf{B}^2 - \log \Phi \quad (2)$$

$$\text{両辺を微分して 0 とおくと、} \frac{dy}{y} = 2 \frac{d\mathbf{B}}{\mathbf{B}} - \frac{d\Phi}{\Phi} = 0 \quad (3)$$

$$\text{よって、} 2 \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mathbf{B}} = \frac{\Delta \Phi}{\Phi} \quad (4)$$

### 5.2 (p.74) 式 (5.37) の意味

$$u_0 G(z; \epsilon) + u'_0 H(z; \epsilon), \quad \epsilon = \frac{\Delta \Phi}{\Phi} \quad (5)$$

を  $\epsilon$  で展開したときの初項が式 (5.37)。2 次以上を無視。

### 5.3 (p.78) 式 (5.50) から式 (5.51) の変形

式 (5.50) の被積分関数第 4 項を部分積分で変形する。

$$(\sqrt{\Phi} S S' H^4)' = \sqrt{\Phi} S S'' H^4 + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}} S S' H^4 + \sqrt{\Phi} S'^2 H^4 + \sqrt{\Phi} S S' H' H^3 \quad (6)$$

で、この右辺第 1 項が式 (5.50) の第 4 項であり、部分積分できる。すなわち

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} -\sqrt{\Phi} S S'' H^4 dz &= -\left[ \sqrt{\Phi} S S' H^4 \right]_{z_0}^{z_1} + \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\Phi} \left( S'^2 + \frac{1}{2} S^2 S' + 4 S S' \frac{H'}{H} \right) H^4 dz \quad (7) \\ &= \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\Phi} \left( S'^2 + \frac{1}{2} S^2 S' + 4 S S' \frac{H'}{H} \right) H^4 dz \quad (8) \end{aligned}$$

(7) の第 1 項は  $z = z_0, z = z_1$  のとき  $H(z) = 0$  だからゼロ。よって、式 (5.50) の他の項とまとめると式 (5.51) になる。

### 5.4 (p.79) 式 (5.55) から式 (5.56)、式 (5.57) への変形

式 (5.55) を式 (5.41) に代入する。

$$\tilde{C}_s = \frac{e}{96m\Phi^*} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}^4 \left( \frac{2e}{m\Phi^*} \mathbf{B}^4 + 5\mathbf{B}'^2 - \mathbf{B}\mathbf{B}'' \right) dz \quad (9)$$

$$= \frac{e}{96m\Phi^*} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \tilde{f}_0(1-1/M) \right]^4 \left( \frac{2e}{m\Phi^*} \mathbf{B}^4 + 5\mathbf{B}'^2 - \mathbf{B}\mathbf{B}'' \right) dz \quad (10)$$



$$= (1 - 1/M)^4 \cdot \frac{e}{96m\Phi^*} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_0^4 \left( \frac{2e}{m\Phi^*} \mathbf{B}^4 + 5\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}\mathbf{B}'' \right) dz \quad (11)$$

後半の部分は  $M \rightarrow \infty$  のときの  $\tilde{C}_s$  で  $\tilde{C}_{s_0}$  とおく。

$$= (1 - 1/M)^4 \tilde{C}_{s_0} \quad (12)$$

同じく、式 (5.43) に代入すると

$$\tilde{C}_c = \frac{-e}{8m\Phi^*} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}^2 \mathbf{B}^2 dz \quad (13)$$

$$= (1 - 1/M)^4 \cdot \frac{-e}{8m\Phi^*} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_0^2 \mathbf{B}^2 dz \quad (14)$$

$$= (1 - 1/M)^4 \tilde{C}_{c_0} \quad (15)$$

$M \rightarrow \infty$  のときの  $\tilde{C}_c$  を  $\tilde{C}_{c_0}$  とおく。

## 5.5 (p.82) $\tilde{C}_{s1}$ と $\tilde{C}_{s1}$ の導出

9 行目からの導出過程。

$$(i) \tilde{f}_1 = \tilde{f}_{1,\min} = 1.5$$

$$(ii) b_1 = \tilde{f}_1 a_1 (a_1 - \tilde{f}_1) = 1.5 \times 150(150 - 1.5) = \frac{50}{33} = 1.515151 \dots = 1.515,$$

$$-M_1 = b_1/a_1 = \frac{50}{33}/150 = \frac{1}{99} = 10^{-2},$$

$$2M_1 r_0 = \frac{1}{99} 3 \times 10^{-2} = \frac{1}{3300} = 3 \times 10^{-4}$$

$$(iii) -M_2 = b_2/(l - b_1) = 200/(100 - 1.515) = 2.0307 \dots = 2.0,$$

$$\tilde{f}_2 = b_2/(1 - M_2) = 200/(1 + 2.0307) = 65.99 \dots = 66,$$

$$\tilde{f}_2/\tilde{f}_{2,\min} = 65.99/25 = 2.63965 \dots = 2.6,$$

図 4.15 で縦軸が 2.6 のとき、横軸は 0.18。

$$(iv) \text{レンズ 1 に対して、} k^2/k_{\min}^2 = 1 \text{ であるから、図 5.11 から } \tilde{C}_{s0}/\tilde{f}_{\min} \text{ の値を読むと } 1.2$$

である。 $\tilde{f}_{1,\min} = 1.5$  であるから、 $\tilde{C}_{s1} = 1.2 \times \tilde{f}_{1,\min} = 1.2 \times 1.5 = 1.8$ ,

レンズ 2 に対して、 $(\beta/\beta_{\min})^2 = (k/k_{\min})^2$  だから、 $(k/k_{\min})^2 = 0.18$ 。図 5.11 から横軸

が 0.18 の時の値を読むと  $\tilde{C}_{s2}/f_{\min} = 12$ 、図 5.12 から  $|M| = 2$  のときの  $\tilde{C}_{s2}/\tilde{C}_{s2_0} = 5$

よって  $\tilde{C}_{s2} = 25 \times 12 \times 5 = 1500$ 。

## 6.1 (p.92) 式 (6.2) から式 (6.3) の変形

式 (6.2) に  $U$  および  $\bar{U}$  をかけて、辺々引き算すると

$$U''\bar{U} + U\bar{U}'' + \left(\frac{\Phi'}{2\Phi}\right)(U'\bar{U} + U\bar{U}') + \left(\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi} \mathbf{B}^2\right)(2U\bar{U}) = 0 \quad (1)$$

$$2r(r'' + \frac{1}{4r^3}(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2) + \left(\frac{\Phi'}{2\Phi}\right)(2rr') + \left(\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi} \mathbf{B}^2\right)(2r^2) = 0 \quad (2)$$

$$r'' + \left(\frac{\Phi'}{2\Phi}\right)r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{4r^4}(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2\right] = 0 \quad (3)$$

$$(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2 = (-2jr^2(\varphi' - \theta'))^2 = -4r^4(\varphi' - \theta')^2 \text{ なのて}$$

$$r'' + \left(\frac{\Phi'}{2\Phi}\right)r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2 - (\varphi' - \theta')^2\right] = 0 \quad (4)$$

$$r'' + \left(\frac{\Phi'}{2\Phi}\right)r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2\left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\frac{\mathbf{B}_c^2}{\mathbf{B}^2}\right)\right] = 0 \quad (5)$$

$r_c$  は陰極を出発するときの  $r$ 、 $\mathbf{B}_c$  は陰極面での  $B_z$  である。ここで、以下の関係を使った。

式 (5.5) から  $r^2(\dot{\varphi} - \omega_L) = \text{一定}$ 。陰極で  $\dot{\varphi} = 0$  とすると  $-r_c^2\omega_c = r^2(\dot{\varphi} - \omega_L)$

$$r(\varphi' - \theta')^2 = (r^2(\dot{\varphi} - \omega_L))^2 \frac{1}{r^3v^2} = \frac{r_c^4\omega_c^2}{r^3v^2} = \frac{r_c^4}{r^3v^2} \frac{e^2\mathbf{B}_c^2}{4m^2} = \frac{\mathbf{B}_c^2 r_c^4}{r^3} \frac{e}{\Phi 8m} \quad (6)$$

## 6.2 (p.92) 式 (6.9) の導出

式 (6.6) で、 $u = \sqrt{\ln(R/R_0)}$  と変数変換し、 $R_0 = R_m$ 、 $R'_0 = 0$  とおくと、

$$u = \sqrt{\ln(R/R_m)}, \quad u^2 = \ln(R/R_m), \quad 2udu = \frac{dR}{R}, \quad \frac{dR}{u} = 2Rdu, \quad \frac{R}{R_m} = e^{u^2} \quad (7)$$

より

$$R'^2 - R_0'^2 = K^2 \ln \frac{R}{R_0} = K^2 u^2 \quad (8)$$

$$R'^2 = K^2 u^2 \quad (9)$$

$$R' = Ku, \quad \frac{dR}{u} = Kdz \quad (10)$$

$$\int_{R_m}^R \frac{dr}{u} = \int_{R_m}^R \frac{dr}{\sqrt{\ln(R/R_m)}} = \int_0^z Kdz = Kz \quad (11)$$

$$\text{左辺} = \int_0^{\ln \sqrt{R/R_m}} 2Rdu = 2R_m \int_0^{\ln \sqrt{R/R_m}} \frac{R}{R_m} du = 2R_m \int_0^{\ln \sqrt{R/R_m}} e^{u^2} du \quad (12)$$

以上より、式 (6.9) が導出された。

$$Kz = \int_{R_m}^R \frac{dr}{\sqrt{\ln(R/R_m)}} = 2R_m \int_0^{\ln \sqrt{R/R_m}} e^{u^2} du \quad (13)$$

## 6.3 (p.94) 式 (6.15) の導出

ここはビーム中で電位が変化するため  $K^2$  を  $K^2(\Phi_0/\Phi)^{3/2}$  に変える必要がある。これは、 $K = 174\sqrt{I_0/\Phi_0^{3/2}}$  の代わりに  $K = 174\sqrt{I_0/\Phi^{3/2}}$  と考えることに相当する。

$$R = \Phi^{-1/4} R^* \quad (14)$$

$$R' = \Phi^{-1/4} R^{*'} - \frac{1}{4} R^* \Phi^{-5/4} \Phi' \quad (15)$$

$$R'' = R^{*''} \Phi^{-1/4} - \frac{1}{2} R^{*'} \Phi^{-5/4} \Phi' + R^* \left\{ \frac{5}{16} \Phi^{-9/4} (\Phi')^2 - \frac{1}{4} \Phi^{-5/4} \Phi'' \right\} \quad (16)$$

これらを式 (6.5) ( $\mathbf{B} = 0$ ) に代入すると

$$R'' + \frac{\Phi}{2\Phi_0} R' + \frac{\Phi''}{4\Phi} R - K^2 \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{1}{2R} = 0 \quad (17)$$

$$R^{*''} \Phi^{-1/4} + \frac{3}{16} \Phi'^2 \Phi^{-9/4} R^* - \frac{K^2}{2} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{1}{R^* \Phi^{-1/4}} = 0 \quad (18)$$

$$R^{*''} + \frac{3}{16} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R^* - \frac{K}{2} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{1}{R^*} \Phi^{1/2} = 0 \quad (19)$$

$Z = K \frac{z}{R_0}$ ,  $dZ = \frac{K}{R_0} dz$ ,  $dZ^2 = \frac{K^2}{R_0^2} dz^2$ ,  $R_0 = \Phi_0^{-1/4} R_0^*$  を代入すると

$$\left( \frac{K}{R_0} \right)^2 \frac{d^2 R^*}{dZ^2} + \left( \frac{K}{R_0} \right)^2 \frac{3}{16} \left( \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dZ} \right)^2 R^* - \frac{K^2}{2} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{\Phi^{1/2}}{R^*} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{\Phi_0^{-1/2} R_0^{*2}} \frac{d^2 R^*}{dZ^2} + \frac{1}{\Phi_0^{-1/2} R_0^{*2}} \frac{3}{16} \left( \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dZ} \right)^2 R^* - \frac{\Phi^{1/2}}{2R^*} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{d^2 (R^*/R_0^*)}{dZ^2} + \frac{3}{16} \left( \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dZ} \right)^2 \frac{R^*}{R_0^*} - \frac{1}{2(R^*/R_0^*)(\Phi/\Phi_0)} = 0 \quad (22)$$

となり、式 (6.15) が導出される。

#### 6.4 (p.95) 式 (6.16) の導出

式 (6.15) を考えたときと同様に、ビーム中で電位が変化するため  $K^2$  を  $K^2(\Phi_0/\Phi)^{3/2}$  に変える必要がある。これは、 $K = 174\sqrt{I_0/\Phi_0^{3/2}}$  の代わりに  $K = 174\sqrt{I_0/\Phi^{3/2}}$  と考えることに相当する。

式 (6.5) で  $R = R_0$  (一定)、 $R' = R'' = 0$ 、 $\mathbf{B} = 0$  とおき、 $F(z) = \Phi(z)/\Phi_0$  とおくと

$$\frac{R_0}{4\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{K^2}{2} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{1}{R_0} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{R_0}{4\Phi_0} \frac{\Phi_0}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{K^2}{2} \left( \frac{\Phi_0}{\Phi} \right)^{3/2} \frac{1}{R_0} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{R_0}{4} \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{K^2}{2} \frac{1}{F^{1/2}} \frac{1}{R_0} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{2K^2}{R_0^2 F^{1/2}} \quad (26)$$

であるから、 $Z = K \frac{z}{R_0}$  の関係を使って、

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dZ} \frac{dZ}{dz} = \frac{dF}{dZ} \frac{K}{R_0} \quad (27)$$

よって

$$(26) \text{ の左辺} = \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{K}{R_0} \frac{d}{dz} \left( \frac{dF}{dZ} \right) = \left( \frac{K}{R_0} \right)^2 \frac{d^2 F}{dZ^2} \quad (28)$$

(26) と合わせて、

$$\frac{d^2 F}{dZ^2} = \frac{2}{F^{1/2}} \quad (29)$$

さらに、この式を積分すると

$$\int \frac{d^2 F}{dZ^2} \frac{dF}{dZ} dZ = \int \frac{2}{F^{1/2}} \frac{dF}{dZ} dZ \quad (30)$$

$$(30) \text{ の左辺} = \frac{dF}{dZ} \frac{dF}{dZ} - \int \frac{d^2 F}{dZ^2} \frac{dF}{dZ} dZ \quad (31)$$

よって、

$$(30) \text{ の左辺} = \int \frac{d^2 F}{dZ^2} \frac{dF}{dZ} dZ = \frac{1}{2} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 \quad (32)$$

一方、

$$(30) \text{ の右辺} = \int 2F^{-1/2} dF = 4F^{1/2} \quad (33)$$

両者を合わせると

$$\left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 = 8F^{1/2} \quad (34)$$

初期条件、 $F'_0 = (dF/dZ)_0$ ,  $F(z=0) = 1$  を入れると

$$\left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 - F_0'^2 = 8(\sqrt{F} - 1) \quad (35)$$

$\Phi$  が減少状態であるから、 $dF/dZ < 0$  であることに注意して、

$$\frac{dF}{dZ} = -\sqrt{8(\sqrt{F} - 1) + F_0'^2} \quad (36)$$

$$Z = -\int_1^F \frac{dF}{\sqrt{8(\sqrt{F} - 1) + F_0'^2}} \quad (37)$$

積分を行うために、 $\sqrt{F} = x$ ,  $F_0'^2 = A$  とおく。 $\frac{dF}{2\sqrt{F}} = dx$ ,  $dF = 2\sqrt{F}dx = 2xdx$  であるから、

$$Z = -2 \int_1^{\sqrt{F}} \frac{xdx}{\sqrt{A - 8 + 8x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{F}} \frac{xdx}{\sqrt{x - 1 + A/8}} \quad (38)$$

ここで積分公式 [6] の p.96:  $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}$  を用いると

$$Z = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \left( (\sqrt{F} + 2 - \frac{A}{4}) \sqrt{\sqrt{F} - 1 + \frac{A}{8}} - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{8}} (3 - \frac{A}{4}) \right) \quad (39)$$

$F'_0 < 0$  であるから  $\sqrt{A} = -F'_0$  に留意して上式をまとめると

$$Z = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \left( (\sqrt{F} + 2 - \frac{F_0'^2}{4}) \sqrt{\sqrt{F} - 1 + \frac{F_0'^2}{8}} + F_0' \frac{1}{\sqrt{8}} (3 - \frac{F_0'^2}{4}) \right) \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{6} F_0' \left( 3 - \frac{F_0'^2}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \sqrt{F} + 2 - \frac{F_0'^2}{4} \right) \sqrt{\sqrt{F} - 1 + \frac{F_0'^2}{8}} \quad (41)$$

となり、式 (6.16) が得られる。

## 6.5 (p.96) 式 (6.9) から式 (6.19) の導出

式 (6.9) は最小ビーム径位置からの積分であるから、式 (6.9) の左辺に  $z = L/2$  を代入し、右辺の積分上限に端での半径  $R = D/2$  を代入すると式 (6.19) が得られる。

## 6.6 (p.96) 式 (6.29) の計算

$$\frac{D}{2R_m} = x \text{ とおくと式 (6.19) の右辺} = \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{u^2} du$$

$$\sqrt{\ln x} = y \text{ とおくと、} x = e^{y^2} \text{ であるから、数値計算は} \frac{1}{e^{y^2}} \int_0^y e^{u^2} du$$

に対して行う。この積分値は  $y = 0.925$  で極大値  $0.5413$  を取る。この  $y$  の値は、 $x$  の値に戻すと  $2.35$  に相当する。

## 7.1 (p.109) 式 (7.10) の導出

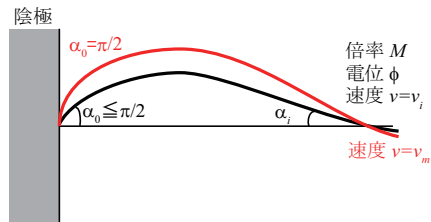
エネルギー保存則  $(1/2)mv_0^2 + e\phi = (1/2)mv_i^2$  を式 (7.9) に代入して  $v_0$  を消去して

$$\sin^2 \alpha_i = (v_i^2 - 2(e/m)\phi) \sin^2 \alpha_0 / M^2 v_i^2 \quad (1)$$

$v_i$  を  $v$  と読み替えると、

$$\sin^2 \alpha_i = (v^2 - 2(e/m)\phi) \sin^2 \alpha_0 / M^2 v^2 \quad (2)$$

$\alpha_0$  の取り得る最大値は  $\pi/2$  であるから積分範囲は  $v$  の大きさによって 2 つの領域に分けられなければならない。 $\phi$  と  $M \sin \alpha_i$  を一定のまま  $v_0$  を減少させると、式 (7.9) により  $\sin \alpha_0$  が逆比例に増大する。しかし  $\alpha_0$  は  $\pi/2$  を越えることは不可能で、 $\theta$  は  $\alpha_i$  よりも小さくなる (図 4 参



照)。 $\alpha_0 = \pi/2$  の時、式 (7.9) を (2) に代入すると、 $(v^2 - 2e\phi/m) = M^2 v^2 \sin^2 \alpha_i$  これを満たす  $v$  を  $v_m$  とおく。

$$v_m^2 = \frac{2e\phi}{m} (1 - M^2 \sin^2 \alpha_i)^{-1} \quad (3)$$

すなわち  $2e\phi/m \leq v^2 \leq v_m^2$  のとき  $\theta$  の上限値は  $\sin^2 \theta \leq (v^2 - 2e\phi/m)/M^2 v^2$  で決まる。式 (7.7) の積分の上限・下限は次となる。

$$\left( \int_{\sqrt{2e\phi/m}}^{v_m} dv \int_0^{\theta_m} d\theta + \int_{v_m}^{\infty} dv \int_0^{\alpha_i} d\theta \right) \pi v^3 \sin 2\theta e^{-mv^2/2kT} \quad (4)$$

ここで  $\theta_m$  は  $\sin^2 \theta_m = (v^2 - 2(e/m)\phi)/M^2 v^2$  を満たすので、

$$\int_0^{\theta} d\theta \sin 2\theta = (1/2) [-\cos 2\theta]_0^{\theta} = (1/2)(1 - \cos 2\theta) = \sin^2 \theta \quad (5)$$

であり、(4) の積分は

$$\int_{\sqrt{2e\phi/m}}^{v_m} dv \pi v^3 e^{-mv^2/2kT} (v^2 - 2e\phi/m)/M^2 v^2 + \int_{v_m}^{\infty} dv \pi v^3 \sin^2 \alpha_i e^{-mv^2/2kT} \quad (6)$$

積分公式

$$\int v e^{-av^2} dv = -\frac{1}{2a} e^{-av^2}, \quad \int v^3 e^{-av^2} dv = -\frac{1}{2a^2} e^{-av^2} (1 + av^2), \quad a = \frac{m}{2kT} \quad (7)$$

と

$$av_m^2 = \frac{1}{1 - M^2 \sin^2 \alpha_i} \frac{e\phi}{kT}, \quad a(\sqrt{2e\phi/m})^2 = \frac{e\phi}{kT} = 2a \frac{e\phi}{m}, \quad (8)$$

などと式 (7.6) を用いて整理する。

$$\begin{aligned} J &= K e^{\frac{e\phi}{kT}} \left( \int_{\sqrt{2e\phi/m}}^{v_m} dv \pi v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} (v^2 - 2e\phi/m)/M^2 v^2 + \int_{v_m}^{\infty} dv \pi v^3 \sin^2 \alpha_i e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right) \\ &= \frac{2a^2 J_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{M^2} \int_{\sqrt{2e\phi/m}}^{v_m} (v^3 e^{-av^2} - \frac{2e\phi}{m} v e^{-av^2}) dv + \pi \sin^2 \alpha_i \int_{v_m}^{\infty} dv v^3 e^{-av^2} \right) \\ &= \frac{2a^2 J_0}{M^2} \left( \left[ -\frac{1}{2a^2} e^{-av^2} (1 + av^2) + \frac{2e\phi}{m} \frac{1}{2a} e^{-av^2} \right]_{\sqrt{2e\phi/m}}^{v_m} \right. \\ &\quad \left. + M^2 \sin^2 \alpha_i \left[ -\frac{1}{2a^2} e^{-av^2} (1 + av^2) \right]_{v_m}^{\infty} \right) \\ &= \frac{2a J_0}{M^2} \left( e^{-av_m^2} \left( -\frac{1}{2a} (1 + av_m^2) + \frac{e\phi}{m} \right) - e^{-e\phi/(kT)} \left( -\frac{1}{2a} (1 + e\phi/(kT)) + \frac{e\phi}{m} \right) \right. \\ &\quad \left. + M^2 \sin^2 \alpha_i \frac{1}{2a} e^{-av_m^2} (1 + av_m^2) \right) \\ &= \frac{2a J_0}{M^2} \left( -(1 - M^2 \sin^2 \alpha_i) e^{-av_m^2} \frac{1 + av_m^2}{2a} + \frac{e\phi}{m} e^{-av_m^2} + e^{-e\phi/(kT)} \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{J_0}{M^2} \left( -(1 - M^2 \sin^2 \alpha_i) e^{-av_m^2} (1 + av_m^2) + \frac{e\phi}{kT} e^{-av_m^2} + e^{-e\phi/(kT)} \right) \\
&= \frac{J_0}{M^2} \left( e^{-av_m^2} (-1 - M^2 \sin^2 \alpha_i) + e^{-e\phi/(kT)} \right) \\
&= \frac{J_0}{M^2} \left( 1 - e^{-av_m^2} e^{e\phi/(kT)} (1 - M^2 \sin^2 \alpha_i) \right) \\
&= \frac{J_0}{M^2} \left( 1 - (1 - M^2 \sin^2 \alpha_i) \exp \left( -\frac{M^2 \sin^2 \alpha_i}{1 - M^2 \sin^2 \alpha_i} \right) \right) \tag{9}
\end{aligned}$$

となり、式 (7.10) が得られる。

## 7.2 (p.111) 式 (7.27) から (7.28) の導出

式 (7.27) から

$$J(x, y) = J_0 \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 \frac{1}{H^2} \iint e^{-\frac{m}{2kT}(x_0^2 + y_0^2)} \left( \int_0^\infty z e^{-\frac{m}{2kT}z_0^2} dz_0 \right) dx_0 dy_0 \tag{10}$$

$$= J_0 \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 \frac{1}{H^2} \iint e^{-\frac{m}{2kT}(x_0^2 + y_0^2)} \frac{1}{2} \left( \frac{2kT}{m} \right) dx_0 dy_0 \tag{11}$$

$$= J_0 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{H^2} \left( \frac{m}{2kT} \right) \iint e^{-\frac{m}{2kT}(x_0^2 + y_0^2)} dx_0 dy_0 \tag{12}$$

ここで  $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} H(z)$  とおくと

$$H^2 = \left( \frac{m}{kT} \right) \sigma^2 \tag{13}$$

$$x_0 = \frac{x - x_0 G}{H} \tag{14}$$

$$y_0 = \frac{y - y_0 G}{H} \tag{15}$$

であるから、代入して、

$$J(x, y) = J_0 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma^2} \iint e^{-\frac{H^2}{2\sigma^2} \left[ \left( \frac{x - x_0 G}{H} \right)^2 + \left( \frac{y - y_0 G}{H} \right)^2 \right]} dx_0 dy_0 \tag{16}$$

$$= J_0 \frac{1}{2\pi \sigma^2} \iint e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ (x - x_0 G)^2 + (y - y_0 G)^2 \}} dx_0 dy_0 \tag{17}$$

となり、(7.28) が導出できた。

## 7.3 (p.112) 式 (7.32) の導出

式 (7.28) より

$$J(x, y) = J_0 \frac{1}{2\pi \sigma^2} \iint e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ (x - x_0 G)^2 + (y - y_0 G)^2 \}} dx_0 dy_0 \tag{18}$$

なぜなら、 $x^2 + y^2 \equiv r^2$ 、 $x_0^2 + y_0^2 \equiv R^2$ 、 $\angle QOP \equiv \varphi$  のとき  $(x - x_0 G)^2 + (y - y_0 G)^2 = G^2 R^2 + r^2 - 2GRr \cos \varphi$  であるから。

積分範囲は  $0 \leq R \leq a, 0 \leq \phi < 2\pi$  なので

$$J(x, y) = J(r) = J_0 \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^a dR \int_0^{2\pi} d\varphi R e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r^2 + G^2 R^2 - 2GRr \cos \varphi)} \quad (19)$$

ここで、 $X = (G/\sigma)R$  とおくと、 $dX = (G/\sigma)dR$  だから

$$J(r) = J_0 \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \int_0^{Ga/\sigma} \left(\frac{\sigma}{G}\right)^2 X \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(X^2 - \frac{2r}{\sigma R} X^2 \cos \varphi)} d\varphi dX \quad (20)$$

$$J(r) = J_0 \frac{1}{2\pi G^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \int_0^{Ga/\sigma} X e^{-\frac{X^2}{2}} \int_0^{2\pi} e^{(\frac{r}{\sigma} X \cos \varphi)} d\varphi dX \quad (21)$$

0 次変形ベッセル関数  $I_0(X)$  の積分表示より

$$2\pi I_0(X) = \int_0^{2\pi} e^{X \cos \varphi} d\varphi \quad (22)$$

$$J(r) = J_0 \frac{1}{G^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \int_0^{Ga/\sigma} e^{-\frac{X^2}{2}} I_0\left(\frac{r}{\sigma} X\right) X dX \quad (23)$$

となり、(7.32) が導出できた。

## 7.4 (p.113) 式 (7.27) の像面での積分計算

像面のときには式 (7.38) により  $b \rightarrow 0$ 。すなわち  $b$  円は  $a$  円に含まれ、軸上値と同じ。  
 $x = y = 0$  とおき計算した後で  $H \rightarrow 0$  とおく。

$$\frac{m}{2kT} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} \frac{m}{kT} \frac{\xi^2}{H^2} = \frac{\xi^2}{2\sigma^2}, \quad d_o dy_0 = \frac{\xi}{G} d\left(\frac{\xi}{G}\right) d\varphi = \frac{d\varphi}{G^2} \xi d\xi \quad (24)$$

式 (7.27) で

$$dx_0 dy_0 \text{に関する積分} = \int_0^b \xi d\xi / G^2 \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\xi^2/2\sigma^2} = \frac{2\pi}{G^2} (1 - e^{-b^2/2\sigma^2}) \quad (25)$$

$$\frac{b^2}{2\sigma^2} = \frac{m}{2kT} v_{0m}^2 = \frac{m}{2kT} \frac{M^2 \sin^2 \alpha_m}{1 - M^2 \sin^2 \theta_m^2} \left( \frac{2eV}{m} + \dot{z}_0^2 \right) = \frac{M^2 \sin^2 \alpha_m}{1 - M^2 \sin^2 \alpha_m} \left( \frac{e\Phi}{kT} + \frac{m}{2kT} \dot{z}_0^2 \right)$$

$\frac{M^2 \sin^2 \alpha_m}{1 - M^2 \sin^2 \alpha_m} = A$  とおくと、 $1 + A = \frac{1}{1 - M^2 \sin^2 \alpha_m}$  なので、

$$J(r) = J_0 \frac{m}{kTG^2} \int_0^\infty \dot{z}_0 e^{-(m\dot{z}_0^2/2kT)} d\dot{z}_0 \left( 1 - e^{-A(e\Phi/kT + (m/2kT)\dot{z}_0^2)} \right) \quad (26)$$

$$= J_0 \frac{m}{kTG^2} \left[ \int_0^\infty \dot{z}_0 e^{-(m\dot{z}_0^2/2kT)} d\dot{z}_0 - e^{-A(e\Phi/kT)} \int_0^\infty \dot{z}_0 e^{-(1+A)(m/2kT)\dot{z}_0^2} d\dot{z}_0 \right] \quad (27)$$

積分公式 (7) を用いて積分すると、

$$J(r) = \frac{J_0}{M^2} \left( 1 - (1 - M^2 \sin^2 \alpha_m) e^{-M^2 \sin^2 \alpha_m / (1 - M^2 \sin^2 \alpha_m) (e\Phi/kT)} \right) \quad (28)$$



## 7.5 (p.114) 式 (7.43) について

- $h_0$  は絞り面で 1。
- $\dot{h}_0$  はその軌道の  $r$  方向速度。
- $\dot{x}_0$  はそれ以下の任意の  $x$  方向速度。

## 7.6 (p.115) 式 (7.48) の導出

式 (7.47) の第 1 式を式 (7.46) に代入すると  $r = r_a(-2MBr_a^2)$  となり、これに  $r_a = \sqrt{-h'_i z / (3MB)}$  を代入すると、 $r = -2MB(\frac{-h'_i z}{3MB})^{3/2}$  となる。両辺を  $r_a^3 MB$  で除すと式 (7.48) の第 1 式になり、式 (7.47) の第 2 式を式 (7.46) に代入すると  $r = 0$  となる。

## 8.1 (p.120) エミッタンスとアクセプタンスの関係について

エミッタンスとアクセプタンスの関係について。領域 I および II での座標および運動量を  $U_I = (x_I, x'_I)$  および  $U_{II} = (x_{II}, x'_{II})$  とし、円筒の変換行列を  $\mathbf{A}$  とした場合、

$$U_{II} = \mathbf{A}U_I \text{ であるから、} U_I = \mathbf{A}^{-1}U_{II} \quad (1)$$

であり、エミッタンスは  $U_I$  に対する範囲を示し、アクセプタンスは  $U_{II}$  を変換した  $\mathbf{A}^{-1}U_{II}$  に対する範囲を示している。

## 9.1 (p.132) 式 (9.10) の導出

運動方程式は、

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''z^2 \\ y''z^2 \end{pmatrix} = \frac{-e}{m} \dot{z} \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \end{pmatrix} \quad (1)$$

磁界型時、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{-e}{m\dot{z}} \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \end{pmatrix} = \frac{-e}{m\dot{z}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{-e}{m\dot{z}} \begin{pmatrix} -\mathbf{B}(z)x \\ \mathbf{B}(z)y \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= -\sqrt{\frac{e}{2m\Phi_0}} \begin{pmatrix} -\mathbf{B}(z)x \\ \mathbf{B}(z)y \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad (3)$$

## 9.2 (p.138) 式 (9.23) から式 (9.24) への変形

式 (9.23) に  $\alpha = \alpha_r \cos \theta$ ,  $\beta = \alpha_r \sin \theta$  を代入し、 $\Delta x^2 + \Delta y^2$  を作って  $\theta$  を 0 から  $2\pi$  まで積分し、その平方根を  $\alpha_r^3 \tilde{C}$  とおく。

$$\alpha_r^3 \tilde{C} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\Delta x^2 + \Delta y^2) d\theta} \quad (4)$$

ここで、

$$\alpha = \alpha_r \cos \theta, \quad \beta = \alpha_r \sin \theta \quad (5)$$

$$\Delta x = M_x(\alpha^3 C_1 + \alpha \beta^2 C_2) = M_x(C_1 \alpha_r^3 \cos^3 \theta + C_2 \alpha_r^3 \cos \theta \sin^2 \theta) \quad (6)$$

$$\Delta y = M_y(\beta^3 D_1 + \beta \alpha^2 C_2) = M_y(D_1 \alpha_r^3 \sin^3 \theta + C_2 \alpha_r^3 \cos^2 \theta \sin \theta) \quad (7)$$

を代入して、次の公式 [6] の p174

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{8} \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{8} \quad (9)$$

を利用して積分を計算する。

$$\int_0^{2\pi} \Delta x^2 d\theta = M_x^2 \alpha_r^6 \left( \frac{5\pi}{8} C_1^2 + \frac{2\pi}{8} C_1 C_2 + \frac{\pi}{8} C_2^2 \right) \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \Delta y^2 d\theta = M_y^2 \alpha_r^6 \left( \frac{5\pi}{8} D_1^2 + \frac{2\pi}{8} D_1 C_2 + \frac{\pi}{8} C_2^2 \right) \quad (11)$$

したがって、

$$\tilde{C} = \frac{1}{\alpha_r^3} \sqrt{\int_0^{2\pi} (\Delta x^2 + \Delta y^2) d\theta} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8} \sqrt{M_x^2 (5C_1^2 + 2C_1 C_2 + C_2^2) + M_y^2 (5D_1^2 + 2D_1 C_2 + C_2^2)}} \quad (13)$$

となる。条件がステイグマチックとしているから  $M_x = M_y$  である。

## 10.1 (p.142) 式 (10.4) の近軸軌道方程式の導出手順

静電偏向のとき、式 (10.2) を式 (4.2) に代入し  $\partial\phi/\partial y$  で現れる  $y^2$  を無視する。磁界偏向のときには式 (4.2) 右辺の第 3 項での  $B_z$  がすでに一次微量であるから、これによる寄与は無視できる。これ以降は変数を  $t$  から  $z$  に変更し、式 (4.17) を用いると式 (10.5) となる。

式 (4.2) で  $\partial\phi/\partial z = 0$ ,  $B_z = 0$  とすると、

$$\ddot{y} = y'' z^2 = -(e/m) z B_x \quad (1)$$

$$y'' = -\frac{e/m}{z} B_x = -\frac{(e/m) B_x}{\sqrt{2e\Phi/m}} = -\sqrt{e/(2m\Phi)} B_x \quad (2)$$

となるから、(10.3) で  $x^3$  や  $xy^2$  の項を 0 とすると

$$\psi(x, y, z) = -\mathbf{B}_0(z)x \quad (3)$$

よって、

$$B_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mathbf{B}_0(z) \quad (4)$$

となるから、式 (2) へ代入すると

$$y'' = -\sqrt{e/(2m\Phi)} \mathbf{B}_0(z) \quad (5)$$

となる。

## 10.2 (p.144) 大型磁気回路の時間応答特性

p.144 に偏光器の時間応答性を左右する因子を説明している。磁界レンズ、磁界プリズムなどのそれも基本的に同じである。とくに超高压電子顕微鏡の対物レンズ、超高分解能磁界プリズムなどのように磁気回路のサイズが大きくなると、磁束密度変化が磁極内部に浸透する所要時間が大幅に増大し、時間応答特性は非常に遅くなる。前者の例として R. Nishi et al, Meas. Sci. Technol., 7 (1996) 1124 がある。その所要時間は深さの二乗と透磁率に比例する。

この原因は渦電流であり、必要最小限な説明は、裏 克己：基礎電磁気学、10.3 節、共立出版、1997 年参照。

### 11.1 (注) 11 章の微分記号

11 章の微分記号' は  $\frac{d}{dx}$  のこと。他の章と異なり、ビームの進む方向が  $x$  座標。

### 11.2 (p.162) 式 (11.18) の近軸軌道方程式の導出

式 (10.4) と同様に導出する。

電界型の時

式 (11.17) の第 2 式で、 $B_z = B_r = 0$  とおくと、

$$m \frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} = 0 \text{ より、} r^2 \dot{\varphi} = \text{一定} \quad (1)$$

これに  $r = r_0 + y$ ,  $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$  を代入すると、 $(r_0 + y)^2(\omega + \dot{\varphi}) = \text{一定}$ 。展開すると、

$$r_0^2 \omega + 2r_0 \omega y + \omega y^2 + r_0^2 \dot{\varphi} + 2r_0 y \dot{\varphi} + y^2 \dot{\varphi} = \text{一定} \quad (2)$$

この式で、0 次項  $r_0^2 \omega$  が一定、1 次項  $2r_0 \omega y + r_0^2 \dot{\varphi}$  を 0、2 次項  $\omega y^2 + 2r_0 y \dot{\varphi} + y^2 \dot{\varphi}$  を 0 とおくと、

$$2\omega y + r_0 \dot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

さらに、運動方程式式 (11.17) の第 1 式に、 $r = r_0 + y$ ,  $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$  を代入すると、 $\ddot{r} = \ddot{y}$  で、 $E_r = E_y = E_0(1 - ny/r_0)$  を使って、0 次項と 1 次項をまとめると、0 次項は、

$$mr_0 \omega^2 = eE_0 \quad (4)$$

1 次項は、

$$\ddot{y} = \frac{e}{m} E_0 \frac{n}{r_0} y + 2r_0 \omega \dot{\varphi} + \omega^2 y \quad (5)$$

(3) 式を代入して

$$\ddot{y} = \frac{e}{m} E_0 \frac{n}{r_0} y - 3\omega^2 y \quad (6)$$

一方、 $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx^2}{dt^2} = y'' v^2 = y'' (r_0 \omega)^2$  だから

$$y'' (r_0 \omega)^2 = \frac{e}{m} E_0 \frac{n}{r_0} y - 3\omega^2 y \quad (7)$$

(4) を使って、

$$y'' = -\frac{3-n}{r_0^2}y = -\left(\frac{\beta_y}{r_0}\right)^2 y, \quad \beta_y = \sqrt{3-n} \quad (8)$$

となり、式 (11.18) の静電型の場合の  $\beta_y$  が決まる。

また、運動方程式 (11.17) 第 3 式より  $m\ddot{z} = -eE_z = -e\mathbf{E}_0(n-1)z/r_0$  で、 $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{dx^2}{dt^2} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2$  だから

$$m\ddot{z} = mz''(r_0\omega)^2 = -eE_z = -e\mathbf{E}_0(n-1)z/r_0 \quad (9)$$

式 (4) を使って

$$z'' = -\frac{e\mathbf{E}_0}{mr_0\omega} \frac{n-1}{r_0^2} z = -\frac{n-1}{r_0^2} z = -\left(\frac{\beta_z}{r_0}\right)^2 z, \quad \beta_z = \sqrt{n-1} \quad (10)$$

となり、静電型の場合の式 (11.18) の  $\beta_z$  が決まる。

磁界型の場合

運動方程式 (11.17) の第 1 式  $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -er\dot{\varphi}B_z$  を使って、0 次項は  $\ddot{r} = 0$  とおくと

$$mr\dot{\varphi}^2 = er\dot{\varphi}B_z, \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{e}{m}B_z = \frac{e}{m}\mathbf{B}_0 \quad (11)$$

同じ運動方程式に  $r = r_0 + y$ ,  $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$  を代入して、1 次項をまとめると

$$m\ddot{y} - m(2r_0\omega\dot{\varphi} + \omega^2y) = -er_0\dot{\varphi}\mathbf{B}_0(-n/r_0)y \quad (12)$$

式 (11) を使って、 $\mathbf{B}_0$  を消すと

$$\ddot{y} = r_0\omega\dot{\varphi} + \omega^2ny \quad (13)$$

次に、運動方程式 (11.17) の第 2 式に、 $r = r_0 + y$ ,  $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$  を代入して、1 次項をまとめる。 $m\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = er(\dot{r}B_z - \dot{z}B_r)$  で、 $\dot{\varphi} = \omega$  を使うと、左辺は、 $m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\dot{\varphi} + 2ry\dot{\varphi} + y^2\ddot{\varphi})$  となり、1 次項は、 $m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\dot{\varphi})$ 。一方、左辺の 1 次項は  $er_0\dot{y}\mathbf{B}_0$ 。 よって、

$$m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\dot{\varphi}) = er_0\dot{y}\mathbf{B}_0 \quad (14)$$

式 (11) を使って、

$$r_0\dot{y}\omega + r_0^2\dot{\varphi} = 0 \quad (15)$$

両辺を積分すると、

$$y\omega + r_0\dot{\varphi} = 0 \quad (y = 0 \text{ で } \dot{\varphi} = 0) \quad (16)$$

これを (13) に代入すると、

$$\ddot{y} = -\omega^2y + \omega^2ny = -\omega^2(1-n)y = y''(r_0\omega)^2 \quad (17)$$

より

$$y'' = -\frac{1-n}{r_0^2}y = -\left(\frac{\beta_y}{r_0}\right)^2 y, \quad \beta_y = \sqrt{1-n} \quad (18)$$

のとなり、磁界型の場合の式 (11.18) の  $\beta_y$  が求まる。

$z$  については、運動方程式 (11.17) の第 3 式  $m\ddot{z} = -e(-r\dot{\varphi}B_r)$  に  $\dot{z} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2$  と  $r = r_0 + y$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$  を代入して、式 (11) を使って、さらに 2 次項を無視すると

$$\ddot{z} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2 = \frac{e}{m}(r_0 + y)\dot{\varphi}(-B_0nz/r_0) = -\omega^2nz \quad (19)$$

よって、

$$z'' = -\left(\frac{\beta_z}{r_0}\right)^2 z, \quad \beta_z = \sqrt{n} \quad (20)$$

となり、磁界型の場合の式 (11.18) の  $\beta_z$  が求まる。

11.3 (p.163) 式 (11.19) から (11.20) そして (11.21)、(11.22) の導出

式 (11.22) は基本的に式 (4.65) と等価。式 (11.21) は式 (11.19) を含めたもの。

11.4 (p.164) 式 (11.26) から (11.27) への導出

式 (11.26) を直接積分する。

$$\int_{x_0}^{x_1} y'' dx = \int \beta^2 y dx \quad (21)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2y}{dx^2} dx = \beta^2 \int y dx \quad (22)$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x_0}^{x_1} = \beta^2 \int y dx + c \quad (c: \text{積分定数}) \quad (23)$$

$$y'_1 - y'_0 = \frac{\tan \alpha}{r_0} y_0 \quad (24)$$

(23) の左辺での積分定数は入射面  $x = x_0$  で  $y' = 0$  から、ゼロ。右辺では積分に上下限を代入するから不要。

11.5 (p.165) 式 (11.32) の導出

式 (11.21) において  $\beta_y = \beta_z = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varphi_v = \varphi/\sqrt{2}$  とおく。

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi_v & \sqrt{2} \sin \varphi_v & 2(1 - \cos \varphi_v) \\ -1/\sqrt{2} \sin \varphi_v & \cos \varphi_v & \sqrt{2} \sin \varphi_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$a = p/\sqrt{2}r_0$ ,  $b = q/\sqrt{2}r_0$  とおくと集束条件は

$$(p/r_0) \cos \varphi_v + \sqrt{2} \sin \varphi_v + (q/r_0)(-p/r_0)/\sqrt{2} \sin \varphi_v + \cos \varphi_v = 0 \quad (26)$$

これらから

$$a + b + \tan \varphi_v(1 - ab) = 0, \quad \tan \varphi_v = -\frac{a + b}{(1 - ab)}, \quad (27)$$

$$\varphi_v = -\arctan \frac{a + b}{1 - ab} + \pi = -(\arctan a + \arctan b) + \pi \quad (28)$$

これと式 (11.30) が等価。全行列の各要素は

$$(1, 1) = \cos \varphi_v - b \sin \varphi_v, (1, 2) = 0, (1, 3) = 2(1 - \cos \varphi_v) + \sqrt{2}(q/r_o) \sin \varphi_v \quad (29)$$

$$(2, 1) = -1/\sqrt{2} \sin \varphi_v, (2, 2) = -1/\sqrt{2} \sin \varphi_v(p/r_o) + \cos \varphi_v, (2, 3) = \sqrt{2} \sin \varphi_v \quad (30)$$

$$p = q \text{ のとき } a = b \text{ であり } \tan(\varphi_v/2 - \pi/2) = -a = -\frac{1}{\tan(\varphi_v/2)}$$

$$\text{三角関数の半角公式 [7] の p.191 から } a = \frac{1 + \cos \varphi_v}{\sin \varphi_v}$$

以上から、 $p = q$  のとき

$$(1, 1) = -1, (1, 2) = 0, (1, 3) = 4, (2, 1) = -(1/\sqrt{2}) \sin \varphi_v, (2, 2) = -1, (2, 3) = \sqrt{2} \sin \varphi_v \quad (31)$$

これは式 (11.32) と等価である。

## 11.6 (p.168) 式 (11.38) の導出

No. p.329 下 3 行参照。

$$\phi = \Phi_0 + x\Phi_1 + (x^2 - y^2)\Phi_2, \mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (32)$$

$$E_x = -(\Phi_1 + 2x\Phi_2), E_y = -(-2y\Phi_2), E_z = 0 \quad (33)$$

$$\psi = y\Psi_1 + 2xy\Psi_2, \mathbf{B} = -\nabla\psi, \quad (34)$$

$$B_x = -(2y\Psi_2), B_y = -(\Psi_1 + 2x\Psi_2), B_z = 0 \quad (35)$$

## 11.7 (p.170) 式 (11.42) の導出

式 (11.28) で  $\alpha = 0, \Theta = \beta$  において、

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 1 - \cos \beta \\ 0 & 1/\cos \beta & \tan \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$p = q$  において、

$$A = \cos \beta \quad (37)$$

$$B = \sin \beta \quad (38)$$

$$C = 0 \quad (39)$$

$$D = 1/A \quad (40)$$

$$E = 1 - A \quad (41)$$

$$F = B/A \quad (42)$$

$$p = 0, \Delta p = 0, q = (L - l)/\cos \beta \quad (43)$$

を p.165 の 1 番上の式に代入すると

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta + (L - l)/(r_o \cos^2 \beta) & 1 - \cos \beta + \tan \beta(L - l)/(r_o \cos \beta) \\ 0 & 1/\cos \beta & \tan \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

から、

$$y_3/r_0 = (y_1/r_0) \cos \beta + y_1'(\sin \beta + (L-l)/(r_0 \cos^2 \beta)) \quad (45)$$

(45) に  $y_1 = -y_1'(L+l)$ ,  $r_0 \sin \beta = 2\ell$  を代入すると式 (11.42) になる。

## 11.8 (p.170) 式 (11.45)~(11.48) について

偏向歪み収差について

式 (11.45) で  $\beta \ll 1$  とおくと

$$\bar{y}_3 - Y_s = \beta^3 \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{4} \right) \quad (46)$$

となり、 $Y_s = L\beta$  であるから、(10.12b) の偏向歪収差

$$Y_s^3 \frac{1 - \frac{l}{2L}}{2L^2} + Y_s X_s^2 \frac{l}{2L^3} \quad (47)$$

において、一次元偏向なので  $X_s = 0$  とおくと、式 (10.12b) と一致する。

像面湾曲収差について

式 (11.46) で  $\beta \ll 1$  とおくと

$$\Delta \bar{y}_3 = \beta^2 y_1' \frac{3L-l}{2} \quad (48)$$

は、(10.12b) の像面湾曲収差

$$Y_s^2 y_s' \frac{3-l/L}{2L} \quad (49)$$

と一致する。

非点収差について

式 (11.28) 第二式から  $A = 1$ ,  $B = \beta$ ,  $C = -\tan \beta$ ,  $D = 1 - \beta \tan \beta$ ,  $p = 0$ ,  $q = (L-l)/\cos \beta$  を用いると

$$\frac{\Delta x}{r_0} = \frac{z_1}{r_0} \left( 1 + \frac{L-l}{r_0 \cos \beta} (-\tan \beta) \right) + z_1' \left( \beta + \frac{L-l}{r_0 \cos \beta} (1 - \beta \tan \beta) \right) \quad (50)$$

ここで  $z_1 = -z_1'(L+l)$ ,  $r_0 \sin \beta = 2\ell$  を用いると式 (11.47) が得られる。

式 (11.47) で  $\beta \ll 1$  とすると

$$\beta^2 \frac{L^2}{2\ell} \left( 1 - \frac{\ell}{L} + \frac{3}{2} \frac{\ell^2}{L^2} \right) \quad (51)$$

となり式 (10.12) の非点収差

$$Y_s^2 x_s' \frac{1-l/L + (2/3)(l/L)^2}{2l} + X_s Y_s y_s' \frac{2}{3l} \left( \frac{l}{L} \right)^2 + Y_s^2 x_s \frac{-1+l/L}{2lL} + X_s Y_s y_s \frac{1}{2L^2} \quad (52)$$

で  $X_s = x_s = y_s = 0$  とおいたものと一致する。

分散について

$y_1 = y'_1 = 0$  と置いて、 $\Delta p/p = \delta$  と書くと、(11.28) の  $M_y$  で  $\alpha = 0$ ,  $\Theta = \beta$ ,  $q = L - l$  なので、 $y_3$  を計算すると

$$y_3 = r_0(1 - \cos \beta)\delta + \frac{L-l}{\cos \beta}\delta(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) \quad (53)$$

となる。図 11.16 より  $2l = r_0 \sin \beta$  であり、(11.46) に代入すると

$$\Delta \bar{y}_3 \sim -\frac{y_3}{\cos \beta} \quad (54)$$

$$= -\frac{1}{\cos \beta} \left[ r_0(1 - \cos \beta)\delta + \frac{L-l}{\cos \beta}\delta(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) \right] \quad (55)$$

$$= -\frac{1}{\cos \beta} \delta \left[ \frac{2l}{\sin \beta}(1 - \cos \beta) + \frac{L-l}{\cos \beta}(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) \right] \quad (56)$$

$$= -\frac{\Delta p}{p} \left[ \frac{2l}{\cos \beta \sin \beta}(1 - \cos \beta) + \frac{L-l}{\cos^2 \beta}(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) \right] \quad (57)$$

$$= -\frac{\Delta p}{p} \left[ \frac{L}{\cos^2 \beta}(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) + l \left( \frac{2(1 - \cos \beta)}{\cos \beta \sin \beta} - \frac{\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta}{\cos^2 \beta} \right) \right] \quad (58)$$

となり、式 (11.48) が得られる。

あるいは、(53) の導出に、式 (11.28) の  $M_y$  に  $\alpha = 0$ ,  $\Theta = \beta$  を入れて、p.165 の上の式を使っても

$$y_3/r_0 = (1 - \cos \beta)\delta + \frac{L-l}{\cos \beta}\delta(\sin \beta + (1 - \cos \beta) \tan \beta) \quad (59)$$

が導出できる。

ここで (11.46) の上側の式

$$\Delta \bar{y}_3 = -y_3 \left( \frac{1}{\cos \beta} - y'_3 \sin \beta \right) \sim -\frac{y_3}{\cos \beta} \quad (60)$$

において、 $y_3, y'_3$  を一次微量とすると、第一等式は無意味である。したがって、これは削除する。～のついた等式は図 11.16 から明らかである。

## 12.1 (p.188) 表 12.5

表 12.5 で、

- 球面収差:  $r_s = (1/4)C_s\alpha^4$
- 回折収差:  $r_d = 0.6\lambda/\sin \alpha_c$

の計算の際の  $\lambda$  は表 12.5 の最右翼列の  $V_1$  に相当する波長を用いる。

|              |     |    |     |
|--------------|-----|----|-----|
| $V_1$ kV     | 0.8 | 4  | 20  |
| $\lambda$ pm | 43  | 19 | 8.6 |



## 14.1 (p.214) 式 (14.20) について

$E_z$ ,  $E_r$  がマクスウェル方程式を満たす。 $e_z$ ,  $e_r$  は、これらのフーリエ変換である。それらが満たす界方程式は p.20 で多重極展開のときに現れるのと類似の偏微分方程式。

空間軌道の焦点距離は、4章と全く同じ方法で導出する。これに  $v_z$  と  $v_r$  が必要。

$$v_1 = v_0 \frac{V_1}{2V_0} \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \quad (1)$$

$$v_r = v_0 \frac{V_1}{2V_0} \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \frac{\beta}{2} r \quad (2)$$

(1) と (2) の比をとると勾配変化。これを式 (4.73) に代入。式 (14.12) の  $v_1$  と演習問題 14.3 での  $v_1$  では  $\exp(j\omega t_0)$  の差があります。

式 (14.20) の導出ままとめると以下のようになる。

まずは、 $v_1$  を導出する。

時間依存性を  $e^{j\omega t}$  で表す。 $z$  方向の運動方程式を積分して

$$v_1 = v_z - v_0 = -\frac{e}{m} \int E_z(r, z) e^{j\omega t} \quad (3)$$

$|v_1| \ll v_0$  とすると (つまり、 $v_z \sim v_0$  ということ)、 $t - t_0 = z/v$ ,  $dt = dz/v_0$  である。 $\beta = \omega/v_0$  で、 $\omega t = \omega t_0 + \beta z = \omega t_0 + \omega z/v_0 = \omega(t_0 + z/v_0)$  の関係を使うと、

$$v_1 = -\frac{e}{m} \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z) e^{j\omega t_0 + j\beta z} dz \quad (4)$$

$$= -\frac{e}{m} \frac{1}{v_0} e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z) e^{j\beta z} dz \quad (5)$$

$$eV_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \text{より} = -\frac{v_0}{2V_0} e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z) e^{j\beta z} dz \quad (6)$$

$$= -\frac{v_0}{2V_0} e^{j\omega t_0} e_z(r, \beta) \quad (7)$$

ただし、 $e_z(r, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z) e^{j\beta z} dz$  で、 $E_z$  が界方程式 (ラプラスの方程式) を満たす。

$$e_z(r, \beta) = e_z(a, \beta) \frac{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} r)}{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} a)} \quad (8)$$

ここで  $a$  は定数で、 $I_0$  は 0 次変形ベッセル関数。変形ベッセル関数とは、岩波公式集 [8] の p.171 によると、

$w = I_\nu(z)$  は変形された Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0 \quad (9)$$

を満足する。

今、0 次だから  $\nu = 0$ ,  $w = e_z(r, \beta)$ ,  $z = r$  と読み替えると

$$\frac{d^2 e_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{de_z}{dr} - e_z = 0 \quad (10)$$

であり、 $e_z$  はこの解である。 $r = a$  での境界条件  $e_z(a, \beta)$  は  $E_z(a, z) = -\frac{V_1}{d}$  ( $|z| < d/2$ ),  $E_z(a, z) = 0$  ( $|z| > d/2$ ) から求まる。すなわち、

$$e_z(a, \beta) = \int_{-d/2}^{d/2} E_z(a, z) e^{j\beta z} dz = \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{V_1}{d} e^{j\beta z} dz = -\frac{V_1}{d} \left[ \frac{e^{j\beta z}}{j\beta} \right]_{-d/2}^{d/2} \quad (11)$$

$$= -\frac{V_1}{d} \frac{1}{j\beta} \left( e^{j\beta d/2} - e^{-j\beta d/2} \right) = -V_1 \frac{\sin \beta \frac{d}{2}}{\beta \frac{d}{2}} = -V_1 \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \quad (12)$$

ここで、 $\theta = \beta d$  である。よって、

$$v_1 = \frac{V_1}{2V_0} v_0 \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \frac{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} r)}{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} a)} e^{j\omega t_0} \quad (13)$$

$\sqrt{\beta^2 - k^2} a \ll 1$  のとき、 $I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} r) \simeq I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} a) \sim 1$  となるので、

$$v_1 = \frac{V_1}{2V_0} v_0 \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} e^{j\omega t_0} \quad (14)$$

式 (14.12) と  $e^{j\omega t_0}$  を除いて一致する。したがって、時間軌道の焦点距離  $f_T$  は式 (14.19) と同じ。

次に、 $v_r$  を導出する。

$$e_r(r, \beta) = \frac{j\beta}{\beta^2 - k^2} \frac{\partial e_z(r, \beta)}{\partial r} = \frac{j\beta}{\beta^2 - k^2} e_z(a, \beta) \frac{I_1(\sqrt{\beta^2 - k^2} r)}{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} a)} \sqrt{\beta^2 - k^2} \quad (15)$$

を用いて、

$$v_r = \frac{V_1}{2V_0} v_0 \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - k^2}} \frac{I_1(\sqrt{\beta^2 - k^2} r)}{I_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} a)} e^{j\omega t_0} \quad (16)$$

$\sqrt{\beta^2 - k^2} a \ll 1$  のとき、

$$v_r = \frac{V_1}{2V_0} v_0 \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \frac{\beta r}{2} e^{j\omega t_0} \quad (17)$$

空間軌道の焦点距離は式 (4.73) で与えられている。 $v_0 \gg v_1$  だから、(17) より軌道勾配は

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{V_1}{2V_0} \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \frac{\beta r}{2} e^{j\omega t_0} \quad (18)$$

式 (14.12)  $\frac{v_1}{v_0} = \frac{V_1 \sin \theta/2}{2V_0 \theta/2}$  を上式に代入して

$$\frac{v_r}{v_0} = \frac{v_1}{2v_0} \beta r e^{j\omega t_0} \quad (19)$$

これが、軌道勾配変化 (式 (4.73) の分子) に相当するから、焦点距離は

$$\frac{1}{f_s} = -\frac{X'_1 - X'_0}{X} = -\frac{v_1}{2v_0} \beta r e^{j\omega t_0} / r = -\frac{v_1}{2v_0} \beta e^{j\omega t_0} \quad (20)$$

時間変化の項  $e^{j\omega t_0}$  の実数部をとると式 (14.20) になる。

## 14.2 (p.224) 式 (14.35) の下の式の導出

$$\ddot{z} = \frac{d}{t} \dot{z} = \frac{d}{dt} \frac{1}{t'} \frac{dz}{dt'} = \frac{d}{dt} \frac{1}{t'} \frac{dt'}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{t''}{t'^2} \frac{1}{t'} \quad (21)$$

## 14.3 (p.224) (14.34) と (14.38) の等価性の証明

変わっているのは第 1 項であるので式 (14.38) の第 1 項の微分を実行し ( $U'$  と  $\gamma_T$  と  $T'$  はすべて  $z$  の関数と考える)、式 (14.34) と一致することを確認する。

$$\frac{d}{dz} \frac{U' \gamma_T}{T'} = U'' \frac{\gamma_T}{T'} + U' \frac{d}{dz} \frac{\gamma_T}{T'}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\gamma_T}{T'} = \frac{\gamma'_T}{T'} + \gamma_T \frac{-T''}{T'^2} \quad (22)$$

$$\gamma'_T = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/c^2 T'^2}} = -\frac{1}{2(1 - 1/(c^2 T'^2))^{3/2}} \left( -\frac{1}{c^2} \frac{-2}{T'^3} \right) T'' = -\frac{\gamma_T^3}{T'^3} \frac{T''}{c^2} \quad (23)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\gamma_T}{T'} = -\frac{\gamma_T^3}{T'^4} \frac{T''}{c^2} - \gamma_T \frac{T''}{T'^2} = -\frac{\gamma_T^3 T''}{T'^2} \left( \frac{1}{c^2 T'^2} + 1 - \frac{1}{c^2 T'^2} \right) = -\frac{\gamma_T^3 T''}{T'^2} = -\frac{e}{m_0} T' \mathcal{E} \quad (24)$$

最後の等号は  $T''$  に式 (14.36) を代入したもので、

$$\frac{d}{dz} \frac{U' \gamma_T}{T'} = \frac{\gamma_T}{T'} \left( U'' - \frac{e}{m_0} \frac{T'^2}{\gamma_T} \mathcal{E} U' \right). \quad (25)$$

よって式 (14.38) と式 (14.34) は等価である。

## 14.4 (p.224) 式 (14.36) の証明

式 (1.13) の両辺の微分をとると

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (26)$$

時間の基準軌道は横方向速度ゼロであり、

$$\frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/c^2 T'^2}} = -\frac{e}{m_0 c^2} E_z \dot{z} \quad (27)$$

すなわち

$$\gamma'_T = -\frac{e}{m_o c^2} \mathcal{E} \quad (28)$$

(23) を用いると式 (14.36) となる。

#### 14.5 (p.224) 式 (14.37) と式 (14.39) 等価性の証明

(25) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \tau' \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3 \right) &= \tau'' \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3 + \tau' \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^2 3 \frac{d}{dz} \frac{\gamma_T}{T'} = \tau'' \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3 - 3 \frac{e}{m_o} T' \mathcal{E} \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^2 \tau' \quad (29) \\ &= \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3 \left( \tau'' - 3 \frac{e}{m_o} \frac{T'^2}{\gamma_T} \mathcal{E} \tau' \right) \quad (30) \end{aligned}$$

これから式 (14.39) と式 (14.37) が等価である。

#### 14.6 (p.224) 式 (14.40)、式 (14.41) の導出

式 (4.73) より薄肉レンズの焦点距離は  $1/f_s = -U'_1/U_1$  である。式 (14.38) を積分して

$$\left( \frac{U'_1 \gamma_T}{T'} \right)_1 = \int_0^1 \frac{\gamma_T}{T'} U[-] dz \quad (31)$$

ただし、 $[-]$  は式 (14.38) の  $U$  の係数である。

積分の中の  $\gamma_t U/T'$  を一定と見なして積分の外に出すと式 (14.40) となる。同様に式 (14.39) を積分して式 (14.41) が得られる。

#### 14.7 (p.225) 式 (14.43) の導出

ビーム径方程式の導出と全く同じ方法をパルス幅に対して適用する。 $q \rightarrow \tau$ ,  $p \rightarrow W_1$  と対応させる。式 (14.31) から

$$W_1 = -\tau' m_o \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3, \quad \frac{dW_1}{dz} = -m_o \frac{d}{dz} \left( \tau' \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3 \right) \quad (32)$$

式 (14.39) を用いると右辺は  $-e\dot{\mathcal{E}}\tau$  すなわち

$$\frac{dW_1}{dz} = -e\dot{\mathcal{E}}\tau \quad (33)$$

式 (8.22) の近軸の運動方程式  $\dot{q} = \frac{p}{m}$ ,  $\dot{p} = f(t)q$  と

$$W_1 = -\tau' m_o \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3, \quad \frac{dW_1}{dz} = -e\dot{\mathcal{E}}\tau \quad (34)$$

を対応させると、

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dz}, \quad m \rightarrow -m_o \left( \frac{\gamma_T}{T'} \right)^3, \quad f(t) \rightarrow -e\dot{\mathcal{E}} \quad (35)$$

ビーム径  $R \rightarrow$  パルス幅  $\tau_w$  の対応関係を使うと式 (8.24)  $\ddot{R} - f(t)\frac{R}{m} = \frac{1}{m^2 R^3} \left(\frac{\epsilon^*}{\pi}\right)$  が

$$\tau_w'' - \frac{e\dot{\epsilon}}{m_0(\gamma_T/T')^3} \tau_w = \left(\frac{\epsilon^*}{\pi}\right)^2 \frac{1}{m_0^2(\gamma_T/T')^6} \frac{1}{\tau_w^3} \quad (36)$$

となり、これは式 (14.43) である。

## 15.1 非直交な電子光学系

最も一般的な電子光学系は直交性を持たない。しかし直交性は、それほど特殊なものではなく、p.255 にも説明したように、軸を含む平面に関して対称であれば、座標の一つをその平面上に設定すれば直交する。そこで 15 章以降では直交性を仮定した。15.3.B 節は直交性を仮定して特性関数法で収差積分公式を、旧著に比べて遙かに見通しよく結果を導いている。

1960 年代には非直交系の研究が盛んであった。H. Rose (1935 年生まれ) の学位論文は、これに関する近軸と収差理論であった (Optik, 24, 36 (1966/67); 27, 466, 497 (1968))。ここでは、レンズの収差補正の可能性を探るのを目的の一つにしていたが、その後、Rose は 17.2 節に見られるように対称性を重視した収差補正理論を追求した。対称性を持つ系の利点として、軸合わせからのズレを検出し易いことも理由の一つに挙げている。

## 15.2 (p.230) 式 (15.6) が式 (15.5) 満たすことの証明

式 (15.6) は

$$\mathcal{L} = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) + e\phi - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

で、式 (15.5) の微分を順に代入して計算する。まず、 $\mathbf{A}$  は  $\mathbf{v}$  に寄らないから、式 (15.5) の第 2 項は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = -m_0 c^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{-2\mathbf{v}}{c^2} - e\mathbf{A} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - e\mathbf{A} \quad (2)$$

となるので、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{d}{dt} e\mathbf{A} \quad (3)$$

$\mathbf{A}$  に関する全微分が

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} \quad (4)$$

であること (但し、時間を陽に含まない場合は第 1 項は無し。) を使って、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - e \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} \right) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - e \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (5)$$

となる。一方、式 (15.5) 第 1 項は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \quad (6)$$

であるが、ベクトル公式

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (7)$$

を適用すると、 $\mathbf{v}$  は  $r$  の関数でないので  $\mathbf{v}$  の  $r$  に関する微分は 0。すなわち、上式 (7) の第 2 項と第 4 項は 0。したがって、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - e((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \quad (8)$$

(5) と (8) を式 (15.5) に代入すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - e((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})) - \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + e \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ,  $\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} = -\mathbf{E}$  であることを使って、整理すると

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (10)$$

となる。これが運動方程式である。式 (1.11) に比べると (10) では右辺第 2 項が付加されている。テキストでは、 $\mathbf{A}$  が時間を陽に含まないとしているので、第 2 項がない。時間を陽に含むときには  $E_x = -\partial\phi/\partial x + \partial A_x/\partial t$

### 15.3 (p.236) 式 (15.38) と式 (15.39) の導出

$$x = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta \quad (11)$$

$$y = X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta \quad (12)$$

とおくと

$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) \sin 2\vartheta + XY \cos 2\vartheta \quad (13)$$

$$x^2 = X^2 \cos^2 \vartheta - XY \sin 2\vartheta + Y^2 \sin^2 \vartheta \quad (14)$$

$$y^2 = X^2 \sin^2 \vartheta + XY \sin 2\vartheta + Y^2 \cos^2 \vartheta \quad (15)$$

$$x' = X' \cos \vartheta - X \vartheta' \sin \vartheta - Y' \sin \vartheta - Y \vartheta' \cos \vartheta = A \cos \vartheta - B \sin \vartheta \quad (16)$$

$$y' = X' \sin \vartheta + X \vartheta' \cos \vartheta + Y' \cos \vartheta - Y \vartheta' \sin \vartheta = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta \quad (17)$$

$$A = X' - Y \vartheta', \quad B = X \vartheta' - Y' \quad \text{とおいた} \quad (18)$$

$$x'y - xy' = (X'Y - XY') - (X^2 + Y^2)\vartheta' \quad (19)$$

$$x'^2 + y'^2 = A^2 \cos^2 \vartheta - 2AB \cos \vartheta \sin \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta + A^2 \sin^2 \vartheta + 2AB \cos \vartheta \sin \vartheta + B^2 \cos^2 \vartheta \quad (20)$$

$$= A^2 + B^2 \quad (21)$$

$$= (X' - Y \vartheta')^2 + (X \vartheta' - Y')^2 \quad (22)$$

$$= (X'^2 + X^2 \vartheta'^2) - 2\vartheta'(X'Y - XY') + (Y'^2 + Y^2 \vartheta'^2) \quad (23)$$

となるから、(15.36) に代入して、

$$\begin{aligned}
 F^{(2)}/C\sqrt{2m_0e} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(x'^2 + y'^2) + \gamma_4(x'y - xy') + \frac{1}{2}\gamma_1x^2 + \gamma_2xy + \frac{1}{2}\gamma_3y^2 & (24) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\{(X'^2 + X^2\vartheta'^2) - 2\vartheta'(X'Y - XY') + (Y'^2 + Y^2\vartheta'^2)\} \\
 &\quad + \gamma_4\{(X'Y - XY') - (X^2 + Y^2)\vartheta'\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\gamma_1\{X^2\cos^2\vartheta - XY\sin 2\vartheta + Y^2\sin^2\vartheta\} \\
 &\quad + \gamma_2\left\{\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)\sin 2\vartheta + XY\cos 2\vartheta\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\gamma_3\{X^2\sin^2\vartheta + XY\sin 2\vartheta + Y^2\cos^2\vartheta\} & (25)
 \end{aligned}$$

いま、 $XY$ ,  $X'Y$ ,  $XY'$  の項を抜き出すと、

$$-\mathbf{P}\vartheta'(X'Y - XY') + \gamma_4(X'Y - XY') - \frac{1}{2}XY((\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta) \quad (26)$$

$$(-\mathbf{P}\vartheta' + \gamma_4)(X'Y - XY') - \frac{1}{2}XY((\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta) \quad (27)$$

$XY$ ,  $X'Y$ ,  $XY'$  それぞれの係数が 0 とおくと、

$$-\mathbf{P}\vartheta' + \gamma_4 = 0 \quad (28)$$

$$(\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta = 0 \quad (29)$$

(29) を整理すると

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \quad (30)$$

そして、(28) を計算するために  $\vartheta'$  を求める。(30) の両辺を  $z$  で微分する。

$$\frac{d}{dz}\tan 2\vartheta = \vartheta'\frac{d}{d\vartheta}\tan 2\vartheta = \vartheta'\frac{2}{\cos^2 2\vartheta} = 2\vartheta'(1 + \tan^2 2\vartheta) = 2\vartheta'(1 + \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2}) \quad (31)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} = \frac{2\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2} \quad (32)$$

$$\text{ゆえに } \vartheta'(1 + \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2}) = \frac{\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2} \quad (33)$$

$$\vartheta'((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + \gamma_2^2) = \gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3') \quad (34)$$

(28) を (34) に代入すると

$$\frac{\gamma_4}{\mathbf{P}}((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + \gamma_2^2) = \gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3') \quad (35)$$

$$\mathbf{P}[\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')] = \gamma_4((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + \gamma_2^2) \quad (36)$$

式 (15.38) が得られた。

別解

$x + jy = u = e^{j\theta}U$ ,  $U = X + jY$  とおくと、

$$x' + jy' = u' = e^{j\theta}(j\theta'U + U') \quad (37)$$

$$x'^2 + y'^2 = u'\bar{u}' = (j\theta'U + U')(-j\theta'\bar{U} + \bar{U}') = U'\bar{U}' + j\theta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) + \theta'^2U\bar{U} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} x'y - xy' &= \frac{1}{4j}(u' + \bar{u}')(u - \bar{u}) - \frac{1}{4j}(u + \bar{u})(u' - \bar{u}') \\ &= \frac{1}{4j}(u'u - u'\bar{u} + \bar{u}'u - \bar{u}'\bar{u} - uu' + u\bar{u}' - \bar{u}u' + \bar{u}\bar{u}') \\ &= \frac{-1}{2j}(u'\bar{u} - u\bar{u}') = \frac{-1}{2j}((U' + j\theta'U)\bar{U} - U(\bar{U}' - j\theta'\bar{U})) \end{aligned} \quad (39)$$

$$= \frac{-1}{2j}(U'\bar{U} - U\bar{U}') - \theta'U\bar{U} \quad (40)$$

$$x^2 + y^2 = u\bar{u} = U\bar{U} \quad (41)$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u + \bar{u})^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u\bar{u} + \bar{u}^2) \quad (42)$$

$$y^2 = -\frac{1}{4}(u - \bar{u})^2 = -\frac{1}{4}(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2) \quad (43)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(u^2 + \bar{u}^2) = \frac{1}{2}(U^2e^{2j\theta} + \bar{U}^2e^{-2j\theta}) \quad (44)$$

$$xy = \frac{1}{4j}(u + \bar{u})(u - \bar{u}) = \frac{1}{4j}(u^2 - \bar{u}^2) = \frac{1}{4j}(U^2e^{2j\theta} - \bar{U}^2e^{-2j\theta}) \quad (45)$$

これを用いると式 (15.36) の第 1、2 項は

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(U'\bar{U}' + j\theta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) + \theta'^2U\bar{U}) + \frac{-1}{2j}\gamma_4(U'\bar{U} - U\bar{U}') - \gamma_4\theta'U\bar{U} \quad (46)$$

ここで  $(U'\bar{U} - U\bar{U}')$  の係数が  $j\mathbf{P}\theta'/2 - \gamma_4/(2j)$  がゼロとなるように  $\theta' = \frac{\gamma_4}{\mathbf{P}}$  とおき  $(U'\bar{U} - U\bar{U}')$  の項すなわち  $(X'Y - XY')$  の項を消すと

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(U'\bar{U}' - \theta'^2U\bar{U}) \quad (47)$$

式 (15.36) の第 3 項以下は

$$\frac{1}{2}\gamma_1\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) + \gamma_2xy + \gamma_3\left(\frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{x^2 - y^2}{4}\right) \quad (48)$$

$$= \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{4}U\bar{U} + \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}(U^2e^{2j\theta} + \bar{U}^2e^{-2j\theta}) + \frac{\gamma_2}{4j}(U^2e^{2j\theta} - \bar{U}^2e^{-2j\theta}) \quad (49)$$

$$= \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{4}U\bar{U} + \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}(U^2(\cos 2\theta + j\sin 2\theta) + \bar{U}^2(\cos 2\theta - j\sin 2\theta)) \quad (50)$$

$$+ \frac{\gamma_2}{4j}(U^2(\cos 2\theta + j\sin 2\theta) - \bar{U}^2(\cos 2\theta - j\sin 2\theta)) \quad (51)$$

$$= \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{4}U\bar{U} + (U^2 + \bar{U}^2)\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\cos 2\theta + j\frac{\gamma_2}{4}\sin 2\theta\right) \quad (52)$$

$$+ j(U^2 - \bar{U}^2)\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\sin 2\theta - \frac{\gamma_2}{4}\cos 2\theta\right) \quad (53)$$

変換後の  $XY$  項を消すには  $(U^2 - \bar{U}^2)$  の項を消せばよい。すなわち、

$$\tan 2\theta = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \quad (54)$$



これが式 (15.38) 第 2 式。以上をまとめて、直交条件を満たすとき、式 (15.36) を座標  $(X, Y)$  で表現すると

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(X'^2 + Y'^2 - \vartheta'^2(X^2 + Y^2)) + \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{4}(X^2 + Y^2) + 2(X^2 - Y^2)\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\cos 2\vartheta + \frac{\gamma_2}{4}\sin 2\vartheta\right) \quad (55)$$

式 (54) から  $\vartheta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3}\right)$  を  $z$  で微分すると

$$\vartheta' = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + 4\gamma_2^2/(\gamma_1 - \gamma_3)^2}\left(\frac{2\gamma_2'}{\gamma_1 - \gamma_3} - \frac{2\gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2}\right) = \frac{\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2} \quad (56)$$

これは式 (47) から  $\frac{\gamma_4}{P}$  に等しい。すなわち、

$$\mathbf{P}(\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')) = \gamma_4((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2) \quad (57)$$

式 (15.38) の第 1 式となる。

式 (54) を用いると、(52) の第 2 項の  $(U^2 - \bar{U}^2)$  の係数は

$$\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\right)\cos 2\vartheta + \frac{\gamma_2}{4}\sin 2\vartheta = \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\right)\cos 2\vartheta + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8}\right)\tan 2\vartheta\sin 2\vartheta \quad (58)$$

$$= \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{8\cos 2\vartheta}\right) \quad (59)$$

$$\frac{1}{\cos 2\vartheta} = \sqrt{1 + \tan^2 2\vartheta} = \frac{\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2}}{\gamma_1 - \gamma_3} \quad (60)$$

これらから、式 (15.36) に直交条件を入れた (55) は

$$F^{(2)} = \frac{\mathbf{P}}{2}(X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)\left(-\frac{\gamma_4}{\mathbf{P}} + \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2}\right) \quad (61)$$

$$+ \frac{1}{4}(X^2 - Y^2)\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2} \quad (62)$$

となり、式 (15.39) が得られる。

#### 15.4 (p.237) 式 (15.43) から式 (15.44) の導出

$$u'\bar{u}' = e^{j\vartheta}(j\vartheta'U + U')e^{-j\vartheta}(j\vartheta'\bar{U} + \bar{U}') = \vartheta'^2 U\bar{U} + U'\bar{U}' + j\vartheta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) \quad (63)$$

$$u\bar{u} = U\bar{U} \quad (64)$$

$$u'\bar{u} - \bar{u}'u = 2j\vartheta'U\bar{U} + U'\bar{U} - \bar{U}'U \quad (65)$$

なので、2 次項のみ集めると

$$F^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Phi^*}\left[u'u - \frac{1}{4}uu'\frac{\Phi''(1 + 2\epsilon\Phi)}{\sqrt{\Phi^*}}\right] + \text{Re}\frac{j}{4}\sqrt{\frac{e}{2m_0}}\mathbf{B}(u'\bar{u} - \bar{u}'u) \quad (66)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\Phi^*}\left[\vartheta'^2 U\bar{U} + U'\bar{U}' + j\vartheta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) - \frac{1}{4}UU'\frac{\Phi''(1 + 2\epsilon\Phi)}{\sqrt{\Phi^*}}\right] \\ + \text{Re}\frac{j}{4}\sqrt{\frac{e}{2m_0}}\mathbf{B}(2j\vartheta'U\bar{U} + U'\bar{U} - \bar{U}'U) \quad (67)$$

$u$  から  $U$  への変換は、 $U$  系での近軸変分関数の虚数部を消すため。その回転角が (4.15) と等価。したがって、(67) で虚数部をゼロにする。(67) で陽に ( $U$  を実数と思って) 虚数となる部分を抜き出して、

$$\text{虚数部} = (U\bar{U}' - U'\bar{U}) \left( \frac{1}{2}\sqrt{\Phi^*}\vartheta' - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{e}{2m_0}}\mathbf{B} \right) = 0 \quad (68)$$

$$U\bar{U}' - U'\bar{U} \neq 0, \text{ then } \frac{1}{2}\sqrt{\Phi^*}\vartheta' - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{e}{2m_0}}\mathbf{B} = 0, \vartheta' = \sqrt{\frac{e}{8m_0\Phi^*}}\mathbf{B} \quad (69)$$

これは式 (4.25) と一致する。したがって、(67) の実数部は、この関係を使って  $\vartheta'$  を消去すると

$$F^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Phi^*} \left[ \vartheta'^2 U\bar{U} + U'\bar{U}' - \frac{1}{4}UU' \frac{\Phi''(1+2\epsilon\Phi)}{\sqrt{\Phi^*}} \right] + \text{Re} \frac{j}{4}\sqrt{\frac{e}{2m_0}}\mathbf{B}(2j\vartheta'U\bar{U}) \quad (70)$$

$$= \frac{1}{2}U'\bar{U}' + U\bar{U} \left[ -\frac{\Phi''(1+2\epsilon\Phi)}{8\sqrt{\Phi^*}} - \frac{1}{16\sqrt{\Phi^*}} \frac{e}{m_0} \mathbf{B}^2 \right] \quad (71)$$

となり、式 (15.44) が得られる。

## 15.5 (p.237) 式 (15.44) から式 (15.45) への導出

$$\omega = X^* + jY^* = \mathbf{P}^{1/2}(X + jY) = \Phi^{1/4}U \quad (72)$$

$$U = (\Phi^*)^{-1/4}w \quad (73)$$

$$U' = -(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}w + (\Phi^*)^{-1/4}w' \quad (74)$$

$$U'\bar{U}' = \left( -(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}w + (\Phi^*)^{-1/4}w' \right) \left( -(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}\bar{w} + (\Phi^*)^{-1/4}\bar{w}' \right) \quad (75)$$

$$= \frac{1}{16}\frac{(\Phi^*)'^2}{(\Phi^*)^{5/2}}w\bar{w} - \frac{1}{4}\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{3/2}}(w'\bar{w} + w\bar{w}') + \frac{1}{(\Phi^*)^{1/2}}w'\bar{w}' \quad (76)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Phi^*}} \left\{ \frac{1}{16} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right)^2 w\bar{w} - \frac{1}{4} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right) (w\bar{w})' + w'\bar{w}' \right\} \quad (77)$$

$$U\bar{U} = (\Phi^*)^{-1/4}w(\Phi^*)^{-1/4}\bar{w} = \Phi^{*-1/2}w\bar{w} \quad (78)$$

これらを式 (15.44) に代入すると

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{16} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right)^2 w\bar{w} - \frac{1}{4} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right) (w\bar{w})' + w'\bar{w}' \right] - w\bar{w} \left[ \frac{1}{8} \frac{\Phi''(1+2\epsilon\Phi)}{\Phi^*} + \frac{e\mathbf{B}^2}{16m_0\Phi^*} \right] \quad (79)$$

$$= \frac{1}{2}w'\bar{w}' + w\bar{w} \left[ -\frac{3}{32} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right)^2 - \frac{\epsilon\Phi\Phi''}{4\Phi^*} - \frac{e\mathbf{B}^2}{16m_0\Phi^*} \right] \quad (80)$$

$$= \frac{1}{2}w'\bar{w}' + w\bar{w} \left[ -\frac{3}{32} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right)^2 - \frac{4\epsilon\Phi^*}{32} \frac{2\Phi\Phi''}{\Phi^{*2}} \left( \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*} \right)^2 - \frac{e\mathbf{B}^2}{16m_0\Phi^*} \right] \quad (81)$$

となります。(79) から (80) へは、最初の [ ] の第 2 項で、(15.42) の上の部分積分の手法で、

$$\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)(w\bar{w})' \rightarrow -\left(\frac{\Phi^*'}{\Phi^*}\right)'(w\bar{w}) = \left[-\frac{(\Phi^*)''}{\Phi^*} + \left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2\right]w\bar{w} \quad (82)$$

$\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)$  が積分の外に出るので軌道方程式に寄与しないことを利用した。

ところで (81) 式の [ ] 内の第 2 項中の  $2\Phi\Phi''/\Phi^{*2}$  が 1 になれば (15.45) になります。

**別解**

電界成分のみを考察

式 (15.42) において  $\Gamma_X = \frac{1}{4} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\mathbf{P}}$  を代入すると、

$$\beta_X^2 = \frac{1}{4} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\mathbf{P}^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mathbf{P}'}{\mathbf{P}}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{P}''}{\mathbf{P}} \quad (83)$$

ここで、

$$\mathbf{P} = \sqrt{\Phi^*} = \sqrt{\Phi(1+\varepsilon\Phi)}, \quad \mathbf{P}' = \frac{\Phi'(1+2\varepsilon\Phi)}{2\mathbf{P}}, \quad \mathbf{P}'' = \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{2\mathbf{P}} + \frac{\varepsilon\Phi'^2}{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{P}'^2}{\mathbf{P}} \quad (84)$$

であるから、(83) に代入して、

$$\beta_X^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\mathbf{P}'}{\mathbf{P}}\right)^2 - \frac{\varepsilon\Phi'^2}{2\mathbf{P}^2} = \frac{1}{4\mathbf{P}^2} (-2\varepsilon\Phi'^2 + 3\frac{\Phi'^2(1+2\varepsilon\Phi)^2}{4\mathbf{P}^2}) \quad (85)$$

$$= \frac{\Phi'^2}{16\mathbf{P}^4} (3 + 4\varepsilon\Phi + 4\varepsilon^2\Phi^2) = \frac{\Phi'^2}{16\mathbf{P}^4} (3 + 4\varepsilon\Phi(1 + \varepsilon\Phi)) \quad (86)$$

これは (15.45) の電界成分に対応。

## 15.6 (p.237) 式 (15.44) から式 (5.4) の導出

$$U = X + jY, \quad \bar{U} = X - jY \quad (87)$$

$$U' = X' + jY', \quad \bar{U}' = X' - jY' \quad (88)$$

$$U'\bar{U}' = X'^2 + Y'^2, \quad U\bar{U} = X^2 + Y^2 \quad (89)$$

$$(90)$$

これらを式 (15.44) に代入すると

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{\Phi^*} (X'^2 + Y'^2) + (X^2 + Y^2) \left[ -\frac{1}{8} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} - \frac{e}{16m_0} \frac{\mathbf{B}^2}{\Phi^*} \right] \quad (91)$$

近軸軌道方程式 (15.16) に上式を代入する。

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial X'} = \sqrt{\Phi^*} X' \quad (92)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial X'} = \sqrt{\Phi^*} X'' + \frac{(\Phi^*)'}{2\sqrt{\Phi^*}} X' \quad (93)$$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial X} = 2X \left[ -\frac{1}{8} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\sqrt{\Phi^*}} - \frac{e}{16m_0} \frac{\mathbf{B}^2}{\sqrt{\Phi^*}} \right] \quad (94)$$

よって、(93) と (94) を合わせて

$$\sqrt{\Phi^*} X'' + \frac{(\Phi^*)'}{2\sqrt{\Phi^*}} X' - 2X \left[ -\frac{1}{8} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\sqrt{\Phi^*}} - \frac{e}{16m_0} \frac{\mathbf{B}^2}{\sqrt{\Phi^*}} \right] = 0 \quad (95)$$

$$X'' + \frac{(\Phi^*)'}{2\Phi^*} X' + \frac{1}{4} \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} X + \frac{e\mathbf{B}^2}{8m_0\Phi^*} X = 0 \quad (96)$$

となる。

$$\Phi^* = \Phi(1 + \varepsilon\Phi) \quad (97)$$

$$(\Phi^*)' = \Phi'(1 + 2\varepsilon\Phi) \quad (98)$$

$$(\Phi^*)'' = \Phi''(1 + 2\varepsilon\Phi) + 2\varepsilon(\Phi')^2 \quad (99)$$

であるから、(99) を (96) に代入すると、

$$X'' + \frac{(\Phi^*)'}{2\Phi^*} X' + \frac{(\Phi^*)''}{4\Phi^*} X - \frac{\varepsilon(\Phi')^2}{2\Phi^*} X + \frac{e\mathbf{B}^2}{8m_0\Phi^*} X = 0 \quad (100)$$

となる。今、非相対論近似であるので (100) において  $\varepsilon \rightarrow 0$  とおくと、式 (5.4) が得られる。

## 15.7 (p.238) 式 (15.50) から式 (11.18) の導出

式 (15.49) より

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \mathbf{P}((x')^2 + (y')^2) - \sqrt{\frac{e}{2m}} \left( -\frac{1}{2} \kappa x^2 \Psi_1 + (x^2 - y^2) \Psi_2 \right) \quad (101)$$

を軌道方程式 (15.16) に代入すると

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x'} = \mathbf{P}x' \quad (102)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x'} = \mathbf{P}x'' + \mathbf{P}'x' \quad (103)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sqrt{\frac{e}{2m}} (-\kappa x \Psi_1 + 2x \Psi_2) \quad (104)$$

$$(105)$$

また、 $y$  について

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial y'} = \mathbf{P}y' \quad (106)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial y'} = \mathbf{P}y'' + \mathbf{P}'y' \quad (107)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{\frac{e}{2m}} (-2y \Psi_2) = 2y \sqrt{\frac{e}{2m}} \Psi_2 \quad (108)$$

$$(109)$$

軌道方程式は  $x$  については (103) と (104) より、 $y$  については (107) と (108) より

$$\mathbf{P}x'' + \mathbf{P}'x' + \sqrt{\frac{e}{2m}} (-\kappa x \Psi_1 + 2x \Psi_2) = 0 \quad (110)$$

$$\mathbf{P}y'' + \mathbf{P}'y' - 2y \sqrt{\frac{e}{2m}} \Psi_2 = 0 \quad (111)$$

式 (15.50) の置き換え  $\kappa \rightarrow 1/r_0$ ,  $\Psi_1 \rightarrow -\mathbf{B}_0$ ,  $\Psi_2 \rightarrow -\frac{1}{2}(\mathbf{B}_0/r_0)n$  (テキストはミス) をしたとき、磁界成分のみだから、 $\mathbf{P}' = 0$  として、

$$\mathbf{P}x'' + \sqrt{\frac{e}{2m}} \left( \frac{x}{r_0} \mathbf{B}_0 - x \frac{\mathbf{B}_0}{r_0} n \right) = 0 \quad (112)$$

$$\mathbf{P}y'' - 2y \sqrt{\frac{e}{2m}} \Psi_2 = 0 \quad (113)$$

整理して、

$$x'' + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi^*}} \frac{\mathbf{B}_0}{r_0} x(1-n) = 0 \quad (114)$$

$$y'' + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi^*}} \frac{\mathbf{B}_0}{r_0} y n = 0 \quad (115)$$

$$(116)$$

$x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$  と読み替えると

$$y'' + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi^*}} \frac{\mathbf{B}_0}{r_0} y(1-n) = 0 \quad (117)$$

$$z'' + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi^*}} \frac{\mathbf{B}_0}{r_0} z n = 0 \quad (118)$$

式 (11.18) の形になる。

## 15.8 (p.244) 式 (15.81) の導出

1 行目の式の導出の際

$$\frac{\delta \tilde{V}_{0c}^1}{\delta X_0} = \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} \quad (119)$$

を利用している。 $X_0$  以外を一定としているから。

## 15.9 (p.244) 式 (15.81) の導出

2 行目の式を導くときに、式 (15.80) の右辺第 5 項と第 6 項から出てくる

$$\frac{1}{2} \mathbf{P}_0 (3X_0'^2 + Y_0'^2) \delta X_0 + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X_0' (X_0'^2 + Y_0'^2) \frac{\partial X_0}{\partial X_0'} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 Y_0' (X_0'^2 + Y_0'^2) \frac{\partial Y_0}{\partial X_0'} \quad (120)$$

の 3 つの項は  $X_0'^2$  や  $Y_0'^2$  の 2 次以上からなるので、0 になるのではなく、軌道の初期値は互いに独立に選べるからである。

15.10 (p.244) 式 (15.77) から式 (15.82) および式 (15.83) の導出

式 (15.77) より

$$\bar{p}_{Xc}^1 = \mathbf{P}_0[X_c^1 - \frac{1}{2}X'_c(X_c'^2 + Y_c'^2)] \quad (121)$$

$X_c^1$ について解いて

$$X_c^1 = \frac{1}{\mathbf{P}_0}\bar{p}_{Xc}^1 + \frac{1}{2}X'_c(X_c'^2 + Y_c'^2) \quad (122)$$

式 (15.81) の第 1 式に  $\tilde{H}'_c$ 、第 2 式に  $\tilde{G}'_{II,c}$  を乗じて、辺々差し引くと

$$\tilde{H}'_c \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} - \tilde{G}'_{II,c} \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} = -X_c^1 \mathbf{P}_c \left( \tilde{H}'_c \tilde{G}'_{II,c} - \tilde{H}'_c \tilde{G}'_{II,c} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) \quad (123)$$

右辺第 1 項は、近軸不変量  $\mathbf{P}_c(\tilde{H}'_c \tilde{G}'_{II,c} - \tilde{H}'_c \tilde{G}'_{II,c}) = K = \mathbf{P}_0$  の関係を使って整理すると、 $X_c^1 \mathbf{P}_0$  であるから、(122) に代入して

$$X_c^1 = \frac{1}{\mathbf{P}_0} \left[ \left( \tilde{H}'_c \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} - \tilde{G}'_{II,c} \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) \right] \quad (124)$$

となり、式 (15.82) が導出できる。

同様に式 (15.83) は、

$$\tilde{H}'_c \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} - \tilde{G}'_{II,c} \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} = \bar{p}_{Xc}^1 \mathbf{P}_c \left( \tilde{G}'_{II,c} \tilde{H}'_c - \tilde{H}'_c \tilde{G}'_{II,c} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) \quad (125)$$

$$= \bar{p}_{Xc}^1 \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{P}_c} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) \quad (126)$$

式 (15.77) より

$$\bar{p}_{Xc}^1 = \mathbf{P}_c \left[ X_c'^1 - \frac{1}{2} X'_c (X_c'^2 + Y_c'^2) \right] \quad (127)$$

の関係を使うと、(126) に代入して

$$X_c'^1 = \frac{1}{\mathbf{P}_c} \bar{p}_{Xc}^1 + \frac{1}{2} X'_c (X_c'^2 + Y_c'^2) \quad (128)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}_0} \left[ \left( \tilde{H}'_c \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} - \tilde{G}'_{II,c} \frac{\partial \tilde{V}_{0c}^1}{\partial X_0} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) \right] + \frac{1}{2} X'_c (X_c'^2 + Y_c'^2) \quad (129)$$

となり、式 (15.83) が導出できる。

16.1 (p.251) 式 (16.3) の導出

式 (15.86) から式 (15.69) の変形を参照して、 $X_i^1 \rightarrow \Delta X_i$ 、 $\partial V_{oi}^1 \rightarrow \partial S^1$  と読み替えると、

$$\Delta X_i \frac{K_X}{M_X} + j \Delta Y_i \frac{K_Y}{M_Y} = \frac{\partial S^1}{\partial X_a} + j \frac{\partial S^1}{\partial Y_a} = 2 \frac{\partial S^1}{\partial \bar{w}_a} \quad (1)$$

## 16.2 (p.251) 式 (16.4) について

左辺で  $(\beta\alpha\delta\gamma\epsilon\eta)$  は  $w_0, \bar{w}_0, w_a, \bar{w}_a, w_d, \bar{w}_d$  の順でべきの大きさを表している。 $(\alpha\beta\gamma\delta\eta\epsilon)$  もべきの大きさを表し、定数ではない。

## 16.3 (p.257) $[N = 6, r = 4]$ の部分の補足説明

下から 12 行目、「べき級数展開が  $r^6$  から始まるから 12 極子界に対応する項がない。 $-(\Phi_0/8)(u'u')^2$  の項だけである。」というのは「3 次収差に対応する電位の 4 次項がない。」ということである。

下から 9 行目、「 $\alpha + \gamma = 3$  は回転対称項である。」というのは  $\alpha + \gamma = 3$  が回転対称項というのは、上 12 行を参照。あるいは訂正された式 (16.8) を参照。

## 16.4 (p.260) 式 (16.16) の導出

式 (15.83) に、 $\tilde{H}_c = \tilde{H}(z_{Fi}) = f_0, \tilde{H}'_c = \tilde{H}'(z_{Fi}) = 0, \tilde{G}_{II,c} = \tilde{G}(z_{Fi}) = 0, \tilde{G}'_{II,c} = \tilde{G}'(z_{Fi}) = -1/f_i, \mathbf{P}_0 = \sqrt{\Phi_0}, X'_c = X'_{Fi} = -X_0/f_i, Y'_c = Y'_{Fi} = -Y_0/f_i$  を代入して、

$$\begin{aligned} X_c^{\prime 1} &= X^{\prime(3)}(z_{Fi}) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \left[ \tilde{H}'_c \frac{\partial \tilde{V}_{oc}^1}{\partial X_0} - \tilde{G}'_{II,c} \frac{\partial \tilde{V}_{oc}^1}{\partial X'_0} \right] - \frac{\tilde{H}'_c}{2} X'_0 (X_0'^2 + Y_0'^2) + \frac{1}{2} X'_c (X_c'^2 + Y_c'^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} \frac{\partial \tilde{V}_{oc}^1}{\partial X'_0} - \frac{X_0}{2f_i} \frac{X_0'^2 + Y_0'^2}{f_i^2} \end{aligned} \quad (3)$$

と式 (16.16) になる。テキストは第 1 項の分母が間違えている。

## 16.5 (p.260) (16.17) の導出

$$V_{0c} = \int F^{(4)} dz = \int_{z_{F0}}^{-\infty} F^{(4)} dz + \int_{-\infty}^{\infty} F^{(4)} dz + \int_{\infty}^{z_{Fi}} F^{(4)} dz \quad (4)$$

第 1 の積分と第 3 の積分領域では変分関数が  $F = \sqrt{\Phi_0} \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}$  であり、 $F^{(4)} = -(\sqrt{\Phi_0}/8)(X'^2 + Y'^2)^2$  となる。無電磁界領域であるから、 $X'' = Y'' = 0$ 。これから  $(X'^2 + Y'^2)^2 = \{(XX' + YY')(X'^2 + Y'^2)\}'$  である。

図 5 のように記号を考えると

$$X(z_{Fi}) = f_0 X'_0, \quad X'(z_{Fi}) = -X_0/f_i, \quad (5)$$

$$X(z_{F0}) = X_0, \quad X'(z_{F0}) = X'_0 \quad (6)$$

$$X(-\infty) = X'_0 \lim_{z \rightarrow -\infty} (z - z_{F0}), \quad X'(-\infty) = X'_0, \quad (7)$$

$$X(\infty) = -(X_0/f_i) \lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_{Fi}), \quad X'(\infty) = -X_0/f_i \quad (8)$$

ここで、(5) 式は (16.15) である。

まず、積分範囲  $z_{F_o} \rightarrow -\infty$  を考えると

$$\int_{z_{F_o}}^{-\infty} F^{(4)} dz = -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8} [(XX' + YY')(X'^2 + Y'^2)]_{z_{F_o}}^{-\infty} \quad (9)$$

$$= -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8} \left[ \{X'_0 \lim_{z \rightarrow -\infty} (z - z_{F_o}) X'_0 + Y'_0 \lim_{z \rightarrow -\infty} (z - z_{F_o}) Y'_0\} \{X_0'^2 + Y_0'^2\} \right. \\ \left. - \{X_0 X'_0 + Y_0 Y'_0\} \{X_0'^2 + Y_0'^2\} \right] \quad (10)$$

$$= -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8} \left[ (X_0'^2 + Y_0'^2)^2 \lim_{z \rightarrow -\infty} (z - z_{F_o}) - (X_0 X'_0 + Y_0 Y'_0) (X_0'^2 + Y_0'^2) \right] \quad (11)$$

次に積分範囲  $\infty \rightarrow z_{F_i}$  を考えると

$$\int_{\infty}^{z_{F_i}} F^{(4)} dz = -\frac{\sqrt{\Phi_i}}{8} [(XX' + YY')(X'^2 + Y'^2)]_{\infty}^{z_{F_i}} \quad (12)$$

$$= -\frac{\sqrt{\Phi_i}}{8} \left[ \left\{ (f_o X_0) \frac{-X_0}{f_i} + (f_o Y_0) \frac{-Y_0}{f_i} \right\} \left\{ \left( \frac{-X_0}{f_i} \right)^2 + \left( \frac{-Y_0}{f_i} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{-X_0}{f_i} \lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_{F_i}) \frac{-X_0}{f_i} + \frac{-Y_0}{f_i} \lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_{F_i}) \frac{-Y_0}{f_i} \right\} \left\{ \left( \frac{-X_0}{f_i} \right)^2 + \left( \frac{-Y_0}{f_i} \right)^2 \right\} \right] \quad (13)$$

$$= \frac{\sqrt{\Phi_i}}{8} \left[ \frac{\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{\Phi_i}} (X_0 X'_0 + Y_0 Y'_0) \frac{X_0'^2 + Y_0'^2}{f_i^2} + \frac{(X_0^2 + Y_0^2)^2}{f_i^4} \lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_{F_i}) \right] \quad (14)$$

両方範囲の積分をまとめると

$$\int_{z_{F_o}}^{-\infty} F^{(4)} dz + \int_{\infty}^{z_{F_i}} F^{(4)} dz = \frac{\sqrt{\Phi_0}}{8} (X_0 X'_0 + Y_0 Y'_0) \left( X_0'^2 + Y_0'^2 + \frac{X_0'^2 + Y_0'^2}{f_i^2} \right) \\ - \frac{\sqrt{\Phi_0}}{8} (X_0'^2 + Y_0'^2)^2 \lim_{z \rightarrow -\infty} (z - z_{F_o}) + \frac{\sqrt{\Phi_i}}{8} \frac{(X_0^2 + Y_0^2)^2}{f_i^4} \lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_{F_i}) \quad (15)$$

となり、式 (16.17) になる。

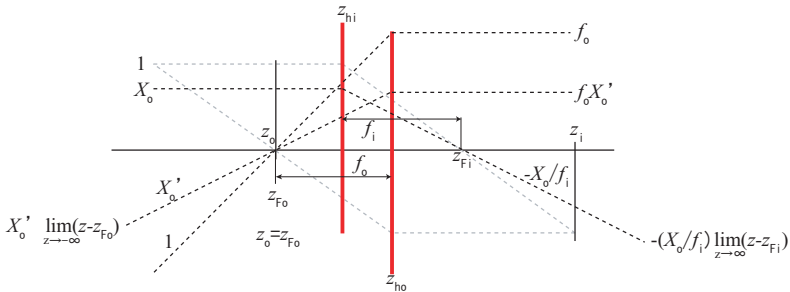


図5 式 (16.15)～式 (16.17) の文字の説明のための薄層近似光線図。(参考: 図 4.26)



## 16.6 (p.260) 式 (16.20) の導出

$U_0 = X_0 + jY_0$ ,  $\bar{U}_0 = X_0 - jY_0$ ,  $U'_0 = X'_0 + jY'_0$ ,  $\bar{U}'_0 = X'_0 - jY'_0$  を式 (16.18) に代入して、 $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $v$  を  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X'_0$ ,  $Y'_0$  で表して、(16.19) 式に代入して、それを (16.16) に代入する手順で計算する。例えば第 1 項の主要部は

$$\frac{\partial r^2}{\partial X_0} = 2r \frac{\partial r}{\partial X_0} = 2r \frac{2X_0}{f_i^2} = 4 \frac{rX_0}{f_i}$$

のようになる。

$X$  成分と  $Y$  成分に対して、 $\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0} + j \frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0}$  を (16.19) の項毎に計算する。簡単のためやや不正確だが、ここでは  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $t$  に対して、それぞれ  $\frac{\partial r}{\partial X_0} + j \frac{\partial r}{\partial Y_0}$  を  $r'$  のように書く事にする。

まず、式 (16.20) の前半の式の導出。

$$r = \frac{U_0 \bar{U}_0}{f_i^2} = \frac{(X_0^2 + Y_0^2)}{f_i^2}, \quad s = U'_0 \bar{U}'_0 = X_0'^2 + Y_0'^2, \quad \xi_0 = \frac{X_0}{f_i}, \quad \eta_0 = \frac{Y_0}{f_i} \quad (16)$$

$$u = \frac{\text{Re}(\bar{U}_0 U'_0)}{f_i} = \xi_0 X'_0 + \eta_0 Y'_0 = \frac{X_0 X'_0 + Y_0 Y'_0}{f_i} \quad (17)$$

$$v = \frac{\text{Im}(\bar{U}_0 U'_0)}{f_i} = \xi_0 Y'_0 - \eta_0 X'_0 = \frac{X_0 Y'_0 - X'_0 Y_0}{f_i} \quad (18)$$

$$r' = \frac{\partial r}{\partial X_0} + j \frac{\partial r}{\partial Y_0} = \frac{(2X_0)}{f_i^2} + j \frac{(2Y_0)}{f_i^2} = 2 \frac{(X_0 + jY_0)}{f_i^2} = 2 \frac{U_0}{f_i^2} \quad (19)$$

$$s' = 0, \quad u' = \frac{X'_0 + jY'_0}{f_i} = \frac{U'_0}{f_i}, \quad v' = \frac{Y'_0 - jX'_0}{f_i} = -j \frac{U'_0}{f_i} \quad (20)$$

$$(r^2)' = 2rr' = 2r2 \frac{U_0}{f_i^2} = 4r \frac{U_0}{f_i^2} \quad (21)$$

$$(rs)' = r's + rs' = 2 \frac{U_0}{f_i^2} s \quad (22)$$

$$(ru)' = r'u + ru' = 2u \frac{U_0}{f_i^2} + r \frac{U'_0}{f_i} \quad (23)$$

$$(rv)' = r'v + rv' = 2v \frac{U_0}{f_i^2} - jr \frac{U'_0}{f_i} \quad (24)$$

$$(s^2)' = 2ss' = 0 \quad (25)$$

$$(su)' = s'u + su' = s \frac{U'_0}{f_i} \quad (26)$$

$$(sv)' = s'v + sv' = -js \frac{U'_0}{f_i} \quad (27)$$

$$(u^2)' = 2uu' = 2u \frac{U'_0}{f_i} \quad (28)$$

$$(uv)' = u'v + uv' = v \frac{U'_0}{f_i} - ju \frac{U'_0}{f_i} \quad (29)$$

$$r^2 = \frac{(X_0^2 + Y_0^2)^2}{f_i^4}, \quad rs = \frac{(X_0^2 + Y_0^2)(X_0'^2 + Y_0'^2)}{f_i^2}, \quad s^2 = (X_0'^2 + Y_0'^2)^2 \quad (30)$$

$$ru = \frac{(X_0^2 + Y_0^2)(X_0X'_0 + Y_0Y'_0)}{f_i^3}, \quad rv = \frac{(X_0^2 + Y_0^2)(X_0Y'_0 - X'_0Y_0)}{f_i^3} \quad (31)$$

$$su = \frac{(X_0X'_0 + Y_0Y'_0)(X_0'^2 + Y_0'^2)}{f_i}, \quad sv = \frac{(X_0Y'_0 - X'_0Y_0)(X_0'^2 + Y_0'^2)}{f_i} \quad (32)$$

$$u^2 = \frac{(X_0X'_0 + Y_0Y'_0)^2}{f_i^2}, \quad uv = \frac{(X_0X'_0 + Y_0Y'_0)(X_0Y'_0 - X'_0Y_0)}{f_i^2} \quad (33)$$

$$v^2 = rs - u^2 \quad (34)$$

$$\frac{f_i}{\sqrt{\Phi_i}} = \frac{f_0}{\sqrt{\Phi_0}} \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi_i}f_0} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}f_i} \quad \text{また} \quad f_0 = f_i\rho \quad (35)$$

(21)–(29)、(35) と式 (16.16) 第 1 式と式 (16.19) とを使って、式 (16.20a) の前半の形を作る。

$$U^{(3)}(z_{Fi})/M = \frac{f_0}{M\sqrt{\Phi_0}} \left( \frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0} + j \frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0} \right) - \frac{f_0}{2M} (X'_0 + jY'_0)(X_0'^2 + Y_0'^2) \quad (36)$$

$$= \frac{f_i}{M\sqrt{\Phi_i}} \left( \frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0} + j \frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0} \right) - \frac{f_0}{2M} U'_0(U'_0\bar{U}'_0) \quad (37)$$

$$= \frac{f_i}{M\sqrt{\Phi_i}} \left( (2000)4r \frac{U_0}{f_i^2} + (1100)2 \frac{U_0}{f_i^2}s + (1010)(2u \frac{U_0}{f_i^2} + r \frac{U'_0}{f_i}) \right. \\ \left. + (1001)(2v \frac{U_0}{f_i^2} - jr \frac{U'_0}{f_i}) + (0110)s \frac{U'_0}{f_i} + (0020)2u \frac{U'_0}{f_i} \right. \\ \left. + (0011)(v \frac{U'_0}{f_i} - ju \frac{U'_0}{f_i}) \right) - \frac{f_0}{2M} U'_0s \quad (38)$$

$$= r \frac{1}{M} \left( 4(2000) \frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}} + (1010) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} - j(1001) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} \right) \\ + u \frac{1}{M} \left( 2(1010) \frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}} + 2(0020) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} - j(0011) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} \right) \\ + s \frac{1}{M} \left( 2(1100) \frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}} + (0110) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} - \frac{f_0}{2} U'_0 \right) \\ + v \frac{1}{M} \left( 2(1001) \frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}} + (0011) \frac{U'_0}{\sqrt{\Phi_i}} \right) \quad (40)$$

これから式 (16.20b) と式 (16.20c) の前半が求められる。

$$Mm_{11} = -\kappa, \quad Mm_{12} = \mu - j\psi\rho, \quad Mm_{13} = 2\mu, \quad Mm_{14} = -\pi + j\tau\rho \\ Mm_{15} = -\lambda, \quad Mm_{16} = \xi - \frac{f_0}{2} + j\sigma\rho, \quad Mm_{17} = 2\psi\rho, \quad Mm_{18} = -\tau\rho \quad (41)$$

次に、同様に式 (16.20) の後半の式の導出。ここでは先程と違いやや不正確だが、ここでは  $r, s, u, t$  に対して、それぞれ  $\frac{\partial r}{\partial X'_0} + j \frac{\partial r}{\partial Y'_0}$  を  $r'$  のように書く事にする。

$$r' = 0 \quad (42)$$

$$s' = 2X'_0 + j2Y'_0 = 2U'_0 \quad (43)$$

$$u' = \frac{1}{f_i}(X_0 + jY_0) = \frac{U_0}{f_i} \quad (44)$$

$$v' = \frac{1}{f_i}(-Y_0 + jX_0) = \frac{jU_0}{f_i} \quad (45)$$

$$(2000)(r^2)' = (2000)2rr' = 0 \quad (46)$$

$$(1100)rs' = (1100)2rU'_0 \quad (47)$$

$$(1010)ru' = (1010)r\frac{U_0}{f_i} \quad (48)$$

$$(1001)rv' = (1001)r\frac{jU_0}{f_i} \quad (49)$$

$$(0200)(s^2)' = (0200)2ss' = (0200)4sU'_0 \quad (50)$$

$$(0110)(su)' = (0110)(s'u + su') = (0110)(2uU'_0 + s\frac{U_0}{f_i}) \quad (51)$$

$$(0101)(sv)' = (0101)(s'v + sv') = (0101)(2vU'_0 + s\frac{jU_0}{f_i}) \quad (52)$$

$$(0020)(u^2)' = (0020)2uu' = (0020)2u\frac{U_0}{f_i} \quad (53)$$

$$(0011)(uv)' = (0011)(u'v + uv') = (0011)(v\frac{U_0}{f_i} + u\frac{jU_0}{f_i}) \quad (54)$$

$$(55)$$

これらと式 (16.16) 第 2 式と式 (16.19) を使って

$$U'^{(3)}(z_{Fi}) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} \left( \frac{\partial V_{0c}}{\partial X'_0} + j \frac{\partial V_{0c}}{\partial Y'_0} \right) - \frac{U_0}{2f_i} \frac{U_0 \bar{U}_0}{f_i^2} \quad (56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} \left( \frac{\partial V_{0c}}{\partial X'_0} + j \frac{\partial V_{0c}}{\partial Y'_0} \right) - \frac{U_0}{2f_i} r \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} r \left( U_0 \left\{ (1010) \frac{1}{f_i} + (1001) \frac{j}{f_i} \right\} + U'_0 \{ (1100)2 \} \right) - \frac{U_0}{2f_i} r \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} u \left( U_0 \left\{ (0020)2 \frac{1}{f_i} + (0011) \frac{j}{f_i} \right\} + U'_0 \{ (0110)2 \} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} s \left( U_0 \left\{ (0110) \frac{1}{f_i} + (0101) \frac{j}{f_i} \right\} + U'_0 \{ (0200)4 \} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \frac{1}{f_i} v \left( U_0 \left\{ (0011) \frac{1}{f_i} \right\} + U'_0 \{ (0101)2 \} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} &= r \left( U_0 \left\{ (1010) \frac{1}{\sqrt{\Phi_i f_0 f_i}} + (1001) \frac{j}{\sqrt{\Phi_0 f_i^2}} - \frac{1}{2f_i} \right\} + U'_0 \left\{ (1100) \frac{2}{\sqrt{\Phi_i f_0}} \right\} \right) \\ &\quad + u \left( U_0 \left\{ (0020) \frac{2}{\sqrt{\Phi_i f_0 f_i}} + (0011) \frac{j}{\sqrt{\Phi_0 f_i^2}} \right\} + U'_0 \left\{ (0110) \frac{2}{\sqrt{\Phi_i f_0}} \right\} \right) \\ &\quad + s \left( U_0 \left\{ (0110) \frac{1}{\sqrt{\Phi_i f_0 f_i}} + (0101) \frac{j}{\sqrt{\Phi_0 f_i^2}} \right\} + U'_0 \left\{ (0200) \frac{4}{\sqrt{\Phi_i f_0}} \right\} \right) \\ &\quad + v \left( U_0 \left\{ (0011) \frac{1}{\sqrt{\Phi_0 f_i^2}} \right\} + U'_0 \left\{ (0101) \frac{2}{\sqrt{\Phi_0 f_i}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &= r \left( U_0 \left\{ \frac{\mu}{f_0 f_i} + \frac{j\psi}{f_i^2} - \frac{1}{2f_i} \right\} + U'_0 \left\{ \frac{-\lambda}{f_0} \right\} \right) \\ &\quad + u \left( U_0 \left\{ \frac{-\pi}{f_0 f_i} + \frac{-j\tau}{f_i^2} \right\} + U'_0 \left\{ \frac{2\zeta}{f_0} \right\} \right) \\ &\quad + s \left( U_0 \left\{ \frac{\zeta}{f_0 f_i} + \frac{-j\sigma}{f_i^2} \right\} + U'_0 \left\{ \frac{-\nu}{f_0} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$+v \left( U_0 \left\{ \frac{-\tau}{f_i^2} \right\} + U'_0 \left\{ \frac{-2\sigma}{f_i} \right\} \right) \quad (60)$$

$$= r(m_{21}U_0/f_i + m_{22}U'_0) + u(m_{23}U_0/f_i + m_{24}U'_0) \\ + s(m_{25}U_0/f_i + m_{26}U'_0) + v(m_{27}U_0/f_i + m_{28}U'_0) \quad (61)$$

(60) と (61) の係数を比較して、(16.20b) の後半の係数を求める。

$$m_{21}/f_i = \frac{\mu}{f_0 f_i} + \frac{j\psi}{f_i^2} - \frac{1}{M f_i} = \frac{1}{f_i^2} \left( \frac{\mu}{\rho} + j\psi - \frac{f_i}{2} \right) = \frac{1}{f_i^2} \left( \frac{M\bar{m}_{12}}{\rho} - \frac{f_i}{2} \right) \quad (62)$$

$$f_i m_{21} = \frac{M\bar{m}_{12}}{\rho} - \frac{f_i}{2} \quad (63)$$

$$m_{22} = \frac{-\lambda}{f_0} = \frac{M m_{15}}{f_0} = \frac{M m_{15}}{f_0} = \frac{M m_{15}}{\rho f_i} \quad (64)$$

$$f_i m_{22} = \frac{M m_{15}}{\rho} \quad (65)$$

$$m_{23}/f_i = \frac{-\pi}{f_0 f_i} + \frac{-j\tau}{f_i^2} = \frac{1}{f_0 f_i} (-\pi - j\tau\rho) = \frac{1}{f_0 f_i} M\bar{m}_{14} = \frac{1}{\rho f_i^2} M\bar{m}_{14} \quad (66)$$

$$f_i m_{23} = \frac{M\bar{m}_{14}}{\rho} \quad (67)$$

$$m_{24} = \frac{2\zeta}{f_0} = \frac{2\text{Re}(M m_{16}) + f_0}{f_0} = \frac{2\text{Re}(M m_{16}) + f_0}{\rho f_i} \quad (68)$$

$$f_i m_{24} = \frac{2\text{Re}(M m_{16}) + f_0}{\rho} \quad (69)$$

$$m_{25}/f_i = \frac{\zeta}{f_0 f_i} + \frac{-j\sigma}{f_i^2} = \frac{1}{f_0 f_i} (\zeta - j\sigma\rho) = \frac{1}{\rho f_i^2} \left( M\bar{m}_{16} + \frac{f_0}{2} \right) \quad (70)$$

$$f_i m_{25} = \frac{1}{\rho} \left( M\bar{m}_{16} + \frac{f_0}{2} \right) \quad (71)$$

$$m_{26} = \frac{-\nu}{f_0} = \frac{-\nu}{f_i \rho} \quad (72)$$

$$f_i m_{26} = \frac{-\nu}{\rho} \quad (73)$$

$$m_{27}/f_i = \frac{-\tau}{f_i^2} = \frac{M m_{18}}{\rho f_i^2} \quad (74)$$

$$f_i m_{27} = \frac{M m_{18}}{\rho} \quad (75)$$

$$m_{28} = \frac{-2\sigma}{f_i} = \frac{-2\text{Im}(M m_{16})}{\rho f_i} \quad (76)$$

$$f_i m_{28} = \frac{-2\text{Im}(M m_{16})}{\rho} \quad (77)$$

となります。

## 16.7 (p.261-262) 式 (16.24) の導出

式 (16.20a)

$$U^{(3)}(z_{F_i})/M = r(m_{11}U_0/f_i + m_{12}U'_0) + u(m_{13}U_0/f_i + m_{14}U'_0)$$

$$+s(m_{15}U_0/f_i + m_{16}U'_0) + v(m_{17}U_0/f_i + m_{18}U'_0) \quad (78)$$

$$U^{(3)}(z_{F_i}) = r(m_{21}U_0/f_i + m_{22}U'_0) + u(m_{23}U_0/f_i + m_{24}U'_0) \\ +s(m_{25}U_0/f_i + m_{26}U'_0) + v(m_{27}U_0/f_i + m_{28}U'_0) \quad (79)$$

上式 (16.20a) の右辺に含まれる  $U_0$  は物側焦点面での値  $U(z_{F_0})$  ですので、式 (16.23) と同様に、新しく移動した物面位置  $z_0$  での座標を使って  $U(z_0)$  に変換する必要がある。

$U^{(3)}$  については (16.20a) の第二式を第一式と同じ方法で物面を移動したときの値に変換する。

$r$  などは  $z_{F_0}$  から物面位置  $z_0$  に移行する時に、 $z_{F_0}$  での値を物面  $z_0$  での値に変換するということです。すなわち、

$$r = U(z_{F_0})\bar{U}(z_{F_0})/f_i^2 = U_0\bar{U}_0 - (U'_0\bar{U}_0 + U_0\bar{U}'_0)f_0/(Mf_0^2) + U_0\bar{U}'_0f_0^2/(M^2f_i^2) \quad (80)$$

であり、これは

$$U(z_{F_0}) = U(z_0) - U'(z_{F_i})\frac{f_0}{M} = U_0 - U'_0\frac{f_0}{M} \quad (81)$$

ということであり、

$$U'(z_{F_i}) = U'(z_0) = U'_0 \text{ および } U(z_0) = U_0 \quad (82)$$

と考えている事になる。

したがって、下記 (83) ~ (86) の右辺において  $U_0 = U(z_0)$  および  $U'_0 = U'(z_0)$  である。

$$r = U_0\bar{U}_0/f_i^2 - 2\rho m\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i + \rho^2 m^2 U'_0\bar{U}'_0 \quad (83)$$

$$u = \text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i - \rho mU'_0\bar{U}'_0 \quad (84)$$

$$v = \text{Im}(\bar{U}_0U'_0)/f_i \quad (85)$$

$$s = U'_0\bar{U}'_0 \quad (86)$$

(16.20a) の  $r, u, v, s$  には (83) ~ (86) を代入し、 $U_0$  には (81) の  $U(z_{F_0})$  を代入する。

$$U^{(3)}(z_i) = U^{(3)}(z_{F_i}) - f_i M U'^{(3)}(z_{F_i}) \text{ なので} \quad (87)$$

$$U^{(3)}(z_i)/M = U^{(3)}(z_{F_i})/M - f_i U'^{(3)}(z_{F_i}) \quad (88)$$

$$= r\{m_{11}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{12}U'_0\} + u\{m_{13}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{14}U'_0\} \\ +s\{m_{15}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{16}U'_0\} + v\{m_{17}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{18}U'_0\} \\ -f_i \left[ r\{m_{21}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{22}U'_0\} + u\{m_{23}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{24}U'_0\} \right. \\ \left. +s\{m_{25}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{26}U'_0\} + v\{m_{27}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{28}U'_0\} \right] \quad (89) \\ = (U_0\bar{U}_0/f_i^2 - 2\rho m\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i + \rho^2 m^2 U'_0\bar{U}'_0)\{m_{11}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{12}U'_0\} \\ +(\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i - \rho mU'_0\bar{U}'_0)\{m_{13}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{14}U'_0\} \\ + (U'_0\bar{U}'_0)\{m_{15}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{16}U'_0\} \\ +(\text{Im}(\bar{U}_0U'_0)/f_i)\{m_{17}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{18}U'_0\}$$

$$\begin{aligned}
& -f_i(\bar{U}_0\bar{U}'_0/f_i^2 - 2\rho m\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i + \rho^2m^2U'_0)\{m_{21}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{22}U'_0\} \\
& -f_i(\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i - \rho mU'_0\bar{U}'_0)\{m_{23}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{24}U'_0\} \\
& -f_i(U'_0\bar{U}'_0)\{m_{25}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{26}U'_0\} \\
& -f_i(\text{Im}(\bar{U}_0U'_0)/f_i)\{m_{27}(U_0 - U'_0\frac{f_0}{M})/f_i + m_{28}U'_0\} \tag{90} \\
= & U_0\bar{U}_0/f_i^2\left((m_{11} - f_im_{21})U_0/f_i + \{(m_{12} - f_im_{22}) - (m_{11} - f_im_{21})\frac{f_0}{f_iM}\}U'_0\right) \\
& +\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i\left((-2\rho m(m_{11} - f_im_{21}) + (m_{13} - f_im_{23}))U_0/f_i\right. \\
& \quad +\{(-2\rho m(m_{12} - f_im_{22}) + (m_{14} - f_im_{24})) \\
& \quad \quad \left.-(-2\rho m(m_{11} - f_im_{21}) + (m_{13} - f_im_{23}))\frac{f_0}{f_iM}\}U'_0\right) \\
& +U'_0\bar{U}'_0\left((\rho^2m^2(m_{11} - f_im_{21}) - \rho m(m_{13} - f_im_{23}) + (m_{15} - f_im_{25}))U_0/f_i\right. \\
& \quad +\{(\rho^2m^2(m_{12} - f_im_{22}) - \rho m(m_{14} - f_im_{24}) + (m_{16} - f_im_{26})) \\
& \quad \quad \left.-(\rho^2m^2(m_{11} - f_im_{21}) - \rho m(m_{13} - f_im_{23}) + (m_{15} - f_im_{25}))\frac{f_0}{f_iM}\}U'_0\right) \\
& +\text{Im}(\bar{U}_0U'_0)/f_i\left((m_{17} - f_im_{27})U_0/f_i\right. \\
& \quad \left.+\{(m_{18} - f_im_{28}) - (m_{17} - f_im_{27})\frac{f_0}{f_iM}\}U'_0\right) \tag{91} \\
= & U_0\bar{U}_0/f_i^2(m_{11}^*U_0/f_i + m_{12}^*U'_0) \\
& +\text{Re}(\bar{U}_0U'_0)/f_i(m_{13}^*U_0/f_i + m_{14}^*U'_0) \\
& +U'_0\bar{U}'_0(m_{15}^*U_0/f_i + m_{16}^*U'_0) \\
& +\text{Im}(\bar{U}_0U'_0)/f_i(m_{17}^*U_0/f_i + m_{18}^*U'_0) \tag{92}
\end{aligned}$$

と置くと、係数  $m_{11}^*$  などは (91) と (92) とを比較することで求める。

$$\begin{aligned}
m_{11} - f_im_{21} &= -\kappa/M - (M\bar{m}_{12}/\rho - f_i/2) = -\kappa m - (\mu + j\psi\rho)/\rho + f_i/2 \\
&= -\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi \tag{93}
\end{aligned}$$

$$m_{11}^* = (m_{11} - f_im_{21}) = -\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi \tag{94}$$

$$= (-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2) + j(-\psi) \tag{95}$$

$$= D + jd \tag{96}$$

$$m_{12} - f_im_{22} = (\mu - j\psi\rho)/M - Mm_{15}/\rho = m(\mu - j\psi\rho) + \lambda/\rho = m\mu - jm\psi\rho + \lambda/\rho \tag{97}$$

$$m_{12}^* = (m_{12} - f_im_{22}) - (m_{11} - f_im_{21})\frac{f_0}{f_iM} \tag{98}$$

$$= m\mu - jm\psi\rho + \lambda/\rho - (-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi)\rho m \tag{99}$$

$$= m\mu + \lambda/\rho + \rho m^2\kappa + m\mu - mf_0/2 \tag{100}$$

$$= \rho\kappa m^2 + (2\mu - f_0/2)m + \lambda/\rho \tag{101}$$

$$= F \tag{102}$$

$$m_{13} - f_im_{23} = 2\mu/M - M\bar{m}_{14}/\rho = 2\mu m - (-\pi - j\tau\rho)/\rho = 2\mu m + \pi/\rho + j\tau \tag{103}$$

$$m_{13}^* = -2\rho m(m_{11} - f_im_{21}) + (m_{13} - f_im_{23}) \tag{104}$$

$$= -2\rho m(-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi) + (2\mu m + \pi/\rho + j\tau) \tag{105}$$

$$= 2\{\rho\kappa m^2 + (2\mu - f_i\rho/2)m + \pi/(2\rho)\} + j(2\rho\psi m + \tau) \quad (106)$$

$$= 2\{\rho\kappa m^2 + (2\mu - f_0/2)m + \pi/(2\rho)\} + j(2\rho\psi m + \tau) \quad (107)$$

$$= 2A + ja \quad (108)$$

$$m_{14} - f_i m_{24} = (-\pi + j\tau\rho)/M - (2\text{Re}(Mm_{16}) + f_0)/\rho \quad (109)$$

$$= m(-\pi + j\tau\rho) - (2(\zeta - f_0/2) + f_0)/\rho \quad (110)$$

$$= -m\pi + jm\tau\rho - 2\zeta/\rho \quad (111)$$

$$m_{14}^* = -2\rho m(m_{12} - f_i m_{22}) + (m_{14} - f_i m_{24}) \\ - (-2\rho m(m_{11} - f_i m_{21}) + (m_{13} - f_i m_{23})) \frac{f_0}{f_i M} \quad (112)$$

$$= -2\rho m(m\mu - jm\psi\rho + \lambda/\rho) + (-m\pi + jm\tau\rho - 2\zeta/\rho) \\ + 2\rho^2 m^2(-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi) - \rho m(2\mu m + \pi/\rho + j\tau) \quad (113)$$

$$= 2\rho m \left( -m\mu + jm\rho\psi - \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\pi}{2\rho} + j\frac{\tau}{2} - \frac{\zeta}{\rho^2 m} - \kappa\rho m^2 - m\mu + \frac{f_0 m}{2} \right. \\ \left. - jm\psi - \mu m - \frac{\pi}{2\rho} - j\frac{\tau}{2} \right) \quad (114)$$

$$= 2 \left[ -\rho^2 m^3 \kappa - \rho(3\mu - f_0/2)m^2 - (\lambda + \pi)m - \zeta/\rho \right] \quad (115)$$

$$= 2K \quad (116)$$

$$m_{15} - f_i m_{25} = (-\lambda/M) - (M\bar{m}_{16} + f_0/2)/\rho = -m\lambda - (\zeta - f_0/2 - j\sigma\rho + f_0/2)/\rho \quad (117)$$

$$= -m\lambda - \zeta/\rho + j\sigma \quad (118)$$

$$m_{15}^* = \rho^2 m^2(m_{11} - f_i m_{21}) - \rho m(m_{13} - f_i m_{23}) + (m_{15} - f_i m_{25}) \quad (119)$$

$$= \rho^2 m^2(-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi) - \rho m(2\mu m + \pi/\rho + j\tau) \\ + (-m\lambda - \zeta/\rho + j\sigma) \quad (120)$$

$$= -\rho^2 m^3 \kappa - 3\rho m^2 \mu + \rho^2 m^2 f_i/2 - j\rho^2 m^2 \psi - m\pi - j\rho m\tau \\ - m\lambda - \zeta/\rho + j\sigma \quad (121)$$

$$= (-\rho^2 \kappa m^3 - \rho(3\mu - f_0/2)m^2 - (\lambda + \pi)m - \zeta/\rho) \\ + j(-\rho^2 \psi m^2 - \rho\tau m + \sigma) \quad (122)$$

$$= K + jk \quad (123)$$

$$m_{16} - f_i m_{26} = (\zeta - f_0/2 + j\sigma\rho)/M + \nu/\rho = m\zeta - mf_0/2 + jm\sigma\rho + \nu/\rho \quad (124)$$

$$m_{16}^* = \rho^2 m^2(m_{12} - f_i m_{22}) - \rho m(m_{14} - f_i m_{24}) + (m_{16} - f_i m_{26}) \\ - (\rho^2 m^2(m_{11} - f_i m_{21}) - \rho m(m_{13} - f_i m_{23}) + (m_{15} - f_i m_{25})) \frac{f_0}{f_i M} \quad (125)$$

$$= \rho^2 m^2 \{ m\mu - jm\psi\rho + \lambda/\rho - (-\kappa m - \mu/\rho + f_i/2 - j\psi)\rho m \} \\ - \rho m \{ -m\pi + jm\tau\rho - 2\zeta/\rho - (2\mu m + \pi/\rho + j\tau)\rho m \} \\ + \{ m\zeta - mf_0/2 + jm\sigma\rho + \nu/\rho - (-m\lambda - \zeta/\rho + j\sigma)\rho m \} \quad (126)$$

$$= \rho^2 m^3 \mu - j\rho^2 m^3 \psi + \rho m^2 \lambda + \rho^3 m^4 \kappa + \rho^2 m^3 \mu + j\rho^3 m^3 \psi \\ + \rho m^2 \pi - j\rho^2 m^2 \tau + 2m\zeta + 2\rho^2 m^3 \mu + \rho m^2 \pi + j\rho^2 m^2 \tau \\ + m\zeta - mf_0/2 + jm\sigma\rho + \nu/\rho + \rho m^2 \lambda + m\zeta - j\rho m\sigma \quad (127)$$

$$= 4\rho^2 m^3 \mu + 2\rho m^2 \lambda + \rho^3 m^4 \kappa - \rho^2 m^3 f_0/2 + 2\rho m^2 \pi + 4m\zeta - mf_0/2 \\ + \nu/\rho \quad (128)$$

$$= \rho^3 \kappa m^4 + \rho^2 m^3 (4\mu - f_0/2) + 2\rho m^2 (\lambda + \pi) + (4\zeta - f_0/2) + \nu/\rho \quad (129)$$

$$= C \quad (130)$$

$$m_{17} - f_i m_{27} = 2\psi\rho/M - Mm_{18}/\rho = 2m\psi\rho - (-\tau\rho)/\rho = 2\rho\psi m + \tau \quad (131)$$

$$m_{17}^* = (m_{17} - f_i m_{27}) \quad (132)$$

$$= 2\rho\psi m + \tau \quad (133)$$

$$= a \quad (134)$$

$$m_{18} - f_i m_{28} = -\tau\rho/M + 2\text{Im}(Mm_{16})/\rho = -m\tau\rho + 2\sigma\rho/\rho = -\rho\tau m + 2\sigma \quad (135)$$

$$m_{18}^* = (m_{18} - f_i m_{28}) - (m_{17} - f_i m_{27}) \frac{f_0}{f_i M} \quad (136)$$

$$= -\rho\tau m + 2\sigma - 2\rho^2 m^2 \psi - \rho m \tau \quad (137)$$

$$= 2\{-\rho^2 m^2 \psi - \rho\tau m + \sigma\} \quad (138)$$

$$= 2k \quad (139)$$

- (95) 式  $m_{11}^*$  で、テキストは  $\mu\rho$  だが  $\mu/\rho$  とすると合う。
- (107) 式  $m_{13}^*$  で、テキストは  $A$  の定義のところの係数 2 を削除し、 $\pi/(2\rho)$  の符号をプラスに修正し、 $a$  の定義で  $\phi$  を  $\psi$  に修正すると合う。(16.28) 式より  $m_{13}^* = 2A + ja$  でないと合わないから、 $A$  の定義の方の係数が余分と判断。
- (115) 式  $m_{14}^*$  で、テキストの  $K$  の定義の第 1 項  $\kappa^2$  を  $\kappa$  に修正すると合う。
- (122) 式  $m_{15}^*$  で、テキストの  $K$  の定義の第 1 項  $\kappa^2$  を  $\kappa$  に修正。 $k$  の定義の第 1 項の 4 を  $\psi$  に修正すると合う。
- (133) 式  $m_{17}^*$  で、テキストの  $\phi$  を  $\psi$  に修正すると合う。
- (139) 式  $m_{18}^*$  で、テキストは  $2K$  だが  $2k$  に修正すると合う。

.....

次に (16.24) の後半の式の導出。

式 (16.20a) の第 2 式で、 $U_0$  を  $U(z_{F_0}) = U(z_0) - U'(z_{F_0})f_0/M = U(z_0) - U'(z_0)f_0/M = U_0 - U'_0 f_0/M$  で置き換える。つぎに  $r, u, s, v$  を式 (16.23) で置き換える。すなわち、式 (16.20a) は、左辺が  $z_{F_i}$  での値で、右辺が  $z_{F_0}$  での  $U$  の値から計算される値である。一方、式 (16.24) は左辺が  $z_i$  の値であり、右辺は  $z_0$  から計算される  $U$  の値である。式 (16.23) の  $r, u, s, v$  は式 (16.18) の  $U_0$  の値が  $U(z_{F_0})$  として、 $z_0$  での値に変換して求めた値である。すなわち、式 (16.24) の左辺に現れる  $U_0$  や  $U'_0$  の値は  $z_0$  における値である。

$$\begin{aligned} U'^{(3)}(z_i) &= r\{m_{21}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{22}U'_0\} + u\{m_{23}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{24}U'_0\} \\ &\quad + s\{m_{25}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{26}U'_0\} + v\{m_{27}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{28}U'_0\} \quad (140) \\ &= (U_0 \bar{U}_0 / f_i^2 - 2\rho m \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) / f_i + \rho^2 m^2 U'_0 \bar{U}'_0) \{m_{21}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{22}U'_0\} \\ &\quad + (\text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) / f_i - \rho m U'_0 \bar{U}'_0) \{m_{23}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{24}U'_0\} \\ &\quad + U'_0 \bar{U}'_0 \{m_{25}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{26}U'_0\} \\ &\quad + (\text{Im}(\bar{U}_0 U'_0) / f_i) \{m_{27}(U_0 - U'_0 \frac{f_0}{M})/f_i + m_{28}U'_0\} \quad (141) \end{aligned}$$

ここで  $\frac{f_0}{f_i M} = \rho m$  より

$$U'^{(3)}(z_i) = (U_0 \bar{U}_0 / f_i^2 - 2\rho m \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) / f_i + \rho^2 m^2 U'_0 \bar{U}'_0) \{m_{21}U_0 / f_i + (m_{22} - m_{21}\rho m)U'_0\}$$



$$\begin{aligned}
& +(\operatorname{Re}(\bar{U}_0 U'_0)/f_i - \rho m U'_0 \bar{U}'_0)\{m_{23} U_0/f_i + (m_{24} - m_{23} \rho m) U'_0\} \\
& + U'_0 \bar{U}'_0 \{m_{25} U_0/f_i + (m_{26} - m_{25} \rho m) U'_0\} \\
& + (\operatorname{Im}(\bar{U}_0 U'_0)/f_i)\{m_{27} U_0/f_i + (m_{28} - m_{27} \rho m) U'_0\}
\end{aligned} \tag{142}$$

これから、式 (16.24) の係数  $m_{21}^*$  などは

$$m_{21}^* = m_{21} \tag{143}$$

$$m_{22}^* = m_{22} - m_{21} \rho m \tag{144}$$

$$m_{23}^* = m_{23} - 2m_{21} \rho m \tag{145}$$

$$m_{24}^* = (m_{24} - m_{23} \rho m) - 2\rho m(m_{22} - m_{21} \rho m) \tag{146}$$

$$m_{25}^* = \rho^2 m^2 m_{21} - \rho m m_{23} + m_{25} \tag{147}$$

$$m_{26}^* = \rho^2 m^2 (m_{22} - m_{21} \rho m) - \rho m (m_{24} - m_{23} \rho m) + (m_{26} - m_{25} \rho m) \tag{148}$$

$$m_{27}^* = m_{27} \tag{149}$$

$$m_{28}^* = m_{28} - m_{27} \rho m \tag{150}$$

となる。ここに式 (16.20b) を代入する。

$$f_i m_{21}^* = f_i m_{21} = M m_{12} / \rho - f_i / 2 = (\mu + j\psi\rho) / \rho - f_i / 2 \tag{151}$$

$$= (\mu - f_0/2) / \rho + j\psi \tag{152}$$

$$f_i m_{22}^* = f_i m_{22} - f_i m_{21} \rho m = M m_{15} / \rho - \rho m (\mu - f_0/2) / \rho - j\rho m \psi \tag{153}$$

$$= -(\mu - f_0/2) m - \lambda / \rho - j\rho m \psi \tag{154}$$

$$f_i m_{23}^* = f_i m_{23} - 2f_i m_{21} \rho m = M \bar{m}_{14} / \rho - 2\rho m (\mu - f_0/2) / \rho - j2\rho m \psi \tag{155}$$

$$= (-\pi - j\tau\rho) / \rho - 2m (\mu - f_0/2) - j2\rho m \psi \tag{156}$$

$$= -2(\mu - f_0/2) m - \pi / \rho - j(2\rho\psi m + \tau) \tag{157}$$

$$= -2(\mu - f_0/2) m - \pi / \rho - ja \tag{158}$$

$$f_i m_{24}^* = f_i m_{24} - f_i m_{23} \rho m - 2\rho m f_i m_{22} + 2\rho^2 m^2 f_i m_{21} \tag{159}$$

$$= (2\operatorname{Re}(M m_{16}) + f_0) / \rho - (-\pi - j\tau\rho) m + 2m\lambda + 2\rho m^2 (\mu - f_0/2) + j2\rho^2 m^2 \psi \tag{160}$$

$$= (2\zeta - f_0 + f_0) / \rho + (2\lambda + \pi) m + j\rho m (2\rho m \psi + \tau) + 2\rho (\mu - f_0/2) m^2 \tag{161}$$

$$= 2\rho (\mu - f_0/2) m^2 + (2\lambda + \pi) m + 2\zeta / \rho + j\rho m a \tag{162}$$

$$f_i m_{25}^* = \rho^2 m^2 f_i m_{21} - \rho m f_i m_{23} + f_i m_{25} \tag{163}$$

$$= \rho m^2 (\mu - f_0/2) + j\rho^2 m^2 \psi + m (\pi + j\tau\rho) + (M \bar{m}_{16} + f_0/2) / \rho \tag{164}$$

$$= \rho m^2 (\mu - f_0/2) + \pi m + j(\rho^2 m^2 \psi + \rho m \tau - \sigma) + \zeta / \rho \tag{165}$$

$$= \rho m^2 (\mu - f_0/2) + \pi m + \zeta / \rho - jk \tag{166}$$

$$f_i m_{26}^* = \rho^2 m^2 f_i m_{22}^* - \rho m (f_i m_{24} - f_i m_{23} \rho m) + f_i m_{26} - f_i m_{25} \rho m \tag{167}$$

$$= -\rho m^2 \lambda - \rho^2 m^3 (\mu - f_0/2) - j\rho^3 m^3 \psi - \rho m (2\zeta / \rho + m\pi + j\rho m \tau) - \nu / \rho - m (\zeta - f_0/2 - j\sigma\rho + f_0/2) \tag{168}$$

$$= -\rho^2 m^3 (\mu - f_0/2) - \rho m^2 (\lambda + \pi) - 3\zeta m - \nu / \rho + j\rho m (-\rho^2 m^2 \psi - \rho m \tau + \sigma) \tag{169}$$

$$= -\rho^2 m^3 (\mu - f_0/2) - \rho m^2 (\lambda + \pi) - 3\zeta m - \nu / \rho + j\rho m k \tag{170}$$

$$f_i m_{27}^* = f_i m_{27} = M m_{18} / \rho = -\tau \tag{171}$$

$$f_i m_{28}^* = f_i m_{28} - f_i m_{27} \rho m = -2\operatorname{Im}(M m_{16}) / \rho + \rho m \tau = \rho m \tau - 2\sigma \tag{172}$$

テキストと違う点をまとめると

- (152) 式  $f_i m_{21}$  で、テキストの  $\phi$  は  $\psi$  の間違い。
- (162) 式  $f_i m_{24}$  で、テキストでは第 1 項に  $\rho$  が抜けている。
- (166) 式  $f_i m_{25}$  で、テキストの第 1 項に  $\rho$  が余分。
- (170) 式  $f_i m_{26}$  で、テキストの第 1 項の  $\rho$  は 2 乗が抜けている。第 3 項の  $\tau$  は  $\zeta$  の間違い。

## 16.8 (p.264) 式 (16.36) の意味

この節での目的は、図 5.21 の二段レンズ系を例にとると、二つのレンズの収差係数がそれぞれ物面と中間像面で定義されているのを、統合した二つのレンズの収差係数を物面で表現することにある。

図 5.21 では軸上球面収差のみであるから物面、中間像面、像面での開き半角の間の関係を計算できればよかった。

この節では、これを一般化するためのもの。

式 (16.24) を行列の形で書くと

$$\begin{pmatrix} U^{(3)} \\ U'^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mm_{11} & Mm_{12} & Mm_{13} & Mm_{14} & Mm_{15} & Mm_{16} & Mm_{17} & Mm_{18} \\ \frac{f_i^3}{f_i^3} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i}{f_i} & \frac{f_i}{f_i} & Mm_{16} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i}{f_i} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \\ \frac{f_i^3}{f_i^3} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i}{f_i} & \frac{f_i}{f_i} & m_{26} & \frac{f_i^2}{f_i^2} & \frac{f_i}{f_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 U'_0 \\ U_0 \bar{U}_0 U'_0 \\ U_0 \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U'_0 \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U_0 U'_0 \bar{U}'_0 \\ U_0^2 U'^2_0 \\ U_0 \text{Im}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U'_0 \text{Im}(\bar{U}_0 U'_0) \end{pmatrix} \quad (173)$$

である。ここで、係数  $m_{11}/f_i^3$  などを、改めて  $m_{11}$  などとおく。

$$\begin{pmatrix} U_m \\ U'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mm_{11} & Mm_{12} & Mm_{13} & Mm_{14} & Mm_{15} & Mm_{16} & Mm_{17} & Mm_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^2 U'_0 \\ U_0 \bar{U}_0 U'_0 \\ U_0 \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U'_0 \text{Re}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U_0 U'_0 \bar{U}'_0 \\ U_0^2 U'^2_0 \\ U_0 \text{Im}(\bar{U}_0 U'_0) \\ U'_0 \text{Im}(\bar{U}_0 U'_0) \end{pmatrix} \quad (174)$$

この  $M_2$  によって、収差を近軸値に取り込む。すなわち行列  $M_2$  は式 (16.24) の収差の成分を含み、式 (16.34) を表す表現になっている。

## 16.9 (p.266) 式 (16.40) で $\zeta_0$ の定義

$\zeta_0$  の定義は

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{\zeta_0} = \left. \frac{d\zeta}{dt} \right|_{\zeta_0} \quad (175)$$

であるので、式 (16.38) を  $t$  で微分すると  $\frac{dz(\zeta)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\eta(\zeta)}{dt}$  なので、 $\left. \frac{d\eta}{dt} \right|_{\zeta_0} = 0$  である。

$$\left. \frac{dz(\zeta)}{dt} \right|_{\zeta_0} = \sqrt{\frac{2e}{m}} W \cos \alpha = \sqrt{\frac{2e}{m}} \Phi(\zeta_0) \quad (176)$$

であるから、 $\Phi(\zeta_0) = \zeta_0 \Phi(0)'$  を代入すると、式 (16.40) を得る。

また、 $\zeta_0$  について以下のことが言える。

1. 基準電子は陰極表面を初速度 0 で  $z$  方向に飛び出す。
2. 軌道電子は陰極表面座標 ( $z = -x_0^2/(2R), x = x_0$ ) を  $z$  軸とのなす角  $\alpha$  で飛び出す。逆算して、速度が 0 になる位置が  $z = -\eta(0)$ 。
3. 軌道電子と基準電子の速度は  $\zeta_0$  の位置で等しい。
4.  $\zeta$  は基準電子の座標。
5. 同じ  $\zeta$  の位置でも、基準電子と軌道電子の速度は等しくない。
6.  $z$  軸上で、ポテンシャル  $\Phi(z)$  は、 $\Phi(0) = 0$  で、勾配は  $\Phi'(0) > 0$ 。  $\Phi(z)$  を  $z$  でべき級数展開した初項。陰極近傍でのみ成立。

## 16.10 (p.271) 10 行目の意味

10 行目の  $(x_1^{m_1} \cdots x_v^{m_v})$  は  $(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_v^{m_v})$  つまり  $(x_1^{m_1}$  と  $x_2^{m_2}$  と  $\cdots$   $x_v^{m_v}$  の  $v$  個の項の積) の意味である。

## 17.1 (p.294) (補足) 図 17.13 の構成で消えない収差

図 17.13 において、 $z_M$  に関して、電磁界は対称。軌道は  $H_x^2$  と  $H_y^2$  および  $G_x^2$  と  $G_y^2$  が対称。 $G_x H_x$  と  $G_y H_y$  が反対称。

表 17.4 から、配置 I だけでは配置 II が満たされず、配置 II で消える項が 2 倍となって残ることは明らか。

まとめると、図 17.13 の構成では、8 極子を使って、円レンズの回転対称の収差を打ち消し、8 極子で生じる四重項成分を 4 極子でキャンセル出来たととしても、4 極子から生じる 3 次幾何収差の内、開口収差の二重項 と 像面湾曲、非点収差の二重項 および 軸上色収差の二重項 が元の 2 倍になって残る。

## 17.2 (p.299) 式 (17.37) の導出

式 (15.63) から  $K_X = K_Y = K, G_X = G_Y = G, H_X = H_Y = H$  なので

$$K(X^1 - jY^1) = G \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial}{\partial X_a} - j \frac{\partial}{\partial Y_a} \right) F^1 dz - H \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial}{\partial X_0} - j \frac{\partial}{\partial Y_0} \right) F^1 dz \quad (1)$$

式 (15.86) より

$$K\bar{u}^1 = G \int_{z_0}^z 2 \frac{\partial}{\partial u_a} F^1 dz - H \int_{z_0}^z 2 \frac{\partial}{\partial u_0} F^1 dz \quad (2)$$

ここで、p.245 で定義されたように  $u = X + jY$ ,  $u^I = X^I + jY^I$ 、p.249 で定義されたように  $w_0 = X_0 + jY_0$ ,  $w_a = X_a + jY_a$  であるから

$$\bar{u}^I = \frac{2}{K} \left( G \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial w_a} F^I dz - H \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial w_0} F^I dz \right) \quad (3)$$

と式 (17.37) が導出される。

17.3 (p.300) 式 (17.39) で (3000) や (1200) は?

(3000) などは収差に寄与しない。

## 参考文献

- [1] 裏 克己, 基礎電磁気学, 共立出版 (1997)
- [2] 裏 克己, 進行波管の動作理論に関する研究, 学位論文 (1961) 付録 B
- [3] W. Glaser, Elektronen-Ionen Physik, Handbuch d. Physik, XXXIII, Springer (1956)
- [4] P. W. Hawkes and E. Kasper, "Principal of electron optics" Vol. 1, Academic Press, London (1989)
- [5] G. H. Jansen, Adv. Electronics and Electron Physics, Suppl, **21**, Chap. 11, Academic Press, London (1989)
- [6] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 I, 岩波書店 (1992)
- [7] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 II, 岩波書店 (1992)
- [8] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 III, 岩波書店 (1991)