補足説明 (追加修正分)

(2011 年 3 月 25 日)

1.1　(p.5) 相反性について

相反性の証明は、$ds \to -ds$ とおいて軌道方程式 (1.18) に代入する方法と、$dt \to -dt$ とおいて運動方程式 (1.13) に代入する方法の 2 通りがある。

3.1　(p.20) 式 (3.23) 補足説明一部訂正

応用数学の教科書によると、z 軸を含む領域でのラプラス解の一般解は円筒座標系での変数分離形で表現すると次である。

$$\sum_{m,k}\{\cos m\varphi(A_{m,k}e^{kz}+B_{m,k}e^{-kz})+\sin m\varphi(C_{m,k}e^{kz}+D_{m,k}e^{-kz})\}J_m(kr). \tag{3-1}$$

ここで、m はゼロを含む正の整数、k は実数である。今、例えば $m=0$ とおき $J_0(kr)$ を $r=0$ に関してべき級数展開すると

$$\sum_{k}(1-\frac{(kr)^2}{4}+\frac{(kr)^4}{64}-\cdots)(A_{0,k}e^{kz}+B_{0,k}e^{-kz}). \tag{3-2}$$

ここで $\phi_0(z)=\sum_k(A_{0,k}e^{kz}+B_{0,k}e^{-kz})$ とおくと上式は

$$\phi_0(z)-\frac{r^2}{4}\frac{d^2\phi_0(z)}{dz^2}+\frac{r^4}{64}\frac{d^{(4)}\phi_0(z)}{dz^4}-\cdots. \tag{3-3}$$

となり、式 (3.23) の回転対称成分と一致する。他の m についても同様である。

4.1　(p.38) 式 (4.76)(ピヒト変換) から式 (4.77) の導出

2 階線形微分方程式

$$x''+px'+qx=0 \tag{4-1}$$

から 1 次の微係数の項を消去する。そのために、変数変換

$$x=f(z)X(z),\ x'=f'X+fX',\ x''=f''X+2f'X'+fX'' \tag{4-2}$$

を代入すると、

$$f''X+2f'X'+fX''+p(f'X+fX')+qfX=0,$$
$$fX''+(2f'+pf)X'+(f''+pf'+qf)X=0$$

いま、1 次微分の項の係数 $2f'+pf=0$ とおくと、

$$f'=-\frac{1}{2}fp \text{ より、} \frac{df}{f}=-\frac{p}{2}dz,\ \log f=-\frac{1}{2}\int pdz$$

近軸軌道方程式 (4.19) より、

$$p=\frac{\Phi'}{2\Phi} \tag{4-3}$$

なので、

$$\log f=-\frac{1}{2}\int pdz=-\frac{1}{2}\int\frac{\Phi'}{2\Phi}dz=-\frac{1}{4}\log\Phi=\log\Phi^{-1/4}$$

よって、

$$f=\Phi^{-1/4} \tag{4-4}$$

これが、ピヒト変換 (式 (4.76)) の係数。

もとの方程式は $2f'+pf=0,\ f''=-\frac{1}{2}(pf)'=-\frac{1}{2}(p'f+pf')$ から

$$fX''+(2f'+pf)X'+(f''+pf'+qf)X=0$$
$$fX''+(f''+pf'+qf)X=0$$
$$fX''+((-\frac{1}{2}(p'f+pf'))+pf'+qf)X=0$$
$$X''+(\frac{1}{2}(pf'-fp')/f+q)X=0$$
$$X''+(\frac{1}{2}pf'/f-\frac{1}{2}p'+q)X=0$$

$$p'=(\frac{\Phi'}{2\Phi})'=\frac{\Phi''\Phi-\Phi'^2}{2\Phi^2},\ f'=-\frac{1}{2}fp=-\frac{1}{2}\Phi^{-1/4}\frac{\Phi'}{2\Phi}=-\frac{1}{4}\Phi^{-5/4}\Phi',$$

$$pf'/f=\frac{\Phi'}{2\Phi}(-\frac{1}{4}\Phi^{-5/4}\Phi')/\Phi^{-1/4}=-\frac{1}{8}(\frac{\Phi'}{\Phi})^2,\ q=\frac{\Phi''}{4\Phi}+\frac{e\mathbf{B}^2}{8m\Phi} \text{ などより}$$

$$X''+\left[\frac{1}{2}(-\frac{1}{8}(\frac{\Phi'}{\Phi})^2)-\frac{1}{2}(\frac{\Phi''\Phi-\Phi'^2}{2\Phi^2})+(\frac{\Phi''}{4\Phi}+\frac{e\mathbf{B}^2}{8m\Phi})\right]X=0 \tag{4-5}$$

$$X''+\left[\frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2+\frac{e\mathbf{B}^2}{8m\Phi}\right]X=0 \tag{4-6}$$

となり、[ ] 内は正である。したがって、$X(z)$ は集束する関数になる。電界のみの時、$\mathbf{B}=0$ とおけば、式 (4.77) となる。

4.2　(p.39) 図 4.10 で漸近結像の物面が $\tilde{z}_o$ であることの説明。

$\tilde{G}_{\mathrm{I}}$ 軌道の漸近線が 1 になる z 座標 $\tilde{z}_0^*$ と $\tilde{z}_o$ が等しくなっていることを証明する。

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}(z)=c_1\tilde{G}_{\mathrm{I}}(z)+c_2\tilde{H}(z) \tag{4-7}$$

とおいて、初期条件

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}(z_0)=\tilde{G}_{\mathrm{I}},\ \tilde{H}(z_0)=0 \text{ と } \tilde{G}'_{\mathrm{II}}(-\infty)=0,\ \tilde{H}'(-\infty)=1 \tag{4-8}$$

を上式に入れると、

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}(z_0)=c_1\tilde{G}_{\mathrm{I}}(z_0) \text{ より、} c_1=1 \text{ 。} \tilde{G}'_{\mathrm{II}}(-\infty)=\tilde{G}'_{\mathrm{I}}(-\infty)+c_2\tilde{H}'(-\infty) \text{ より } c_2=-\frac{\tilde{G}'_{\mathrm{I}}(-\infty)}{\tilde{H}'(-\infty)}$$

よって、

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}(z)=\tilde{G}_{\mathrm{I}}(z)-\frac{\tilde{G}'_{\mathrm{I}}(-\infty)}{\tilde{H}'(-\infty)}\tilde{H}(z) \tag{4-9}$$

また、$z\to-\infty$ で

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}(z)=1=\tilde{G}_{\mathrm{I}}(z)-\frac{\tilde{G}'_{\mathrm{I}}(-\infty)}{\tilde{H}'(-\infty)}\tilde{H}(z) \text{ より、} \frac{1-\tilde{G}_I(z)}{\tilde{G}'_{\mathrm{I}}(-\infty)}=\frac{-\tilde{H}(z)}{\tilde{H}'(-\infty)} \tag{4-10}$$

の関係があるので、$\tilde{G}_{\rm I}$ 軌道の漸近線が 1 になる z 座標を $\tilde{z}_o^*$ としているから、$\tilde{G}_{\rm I}$ 軌道は $z \to -\infty$ で、

$$\tilde{G}_{\rm I}(z) = \tilde{G}'_{\rm I}(-\infty)(z - \tilde{z}_0^*) + 1 \text{ より、} \tilde{z}_0^* = z - \frac{\tilde{G}_{\rm I}(z) - 1}{\tilde{G}'_{\rm I}(-\infty)} = z - \frac{\tilde{H}(z)}{\tilde{H}'(-\infty)} \tag{4-11}$$

一方、$\tilde{H}$ 軌道の漸近線が 0 になる z 座標が $\tilde{z}_0$ なので、$\tilde{H}$ 軌道は $z \to -\infty$ で、

$$\tilde{H}(z) = \tilde{H}'(-\infty)(z - \tilde{z}_0) \tag{4-12}$$

であるので、$z \to -\infty$ で、

$$\tilde{z}_0 = z - \frac{\tilde{H}(z)}{\tilde{H}'(-\infty)} \tag{4-13}$$

これは、上記の式 (4-11) の $\tilde{z}_0^*$ と等しい。すなわち、

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_0^* \tag{4-14}$$

である。

5.1 (p.64) 収差の英語表記

球面収差だけが aberration という単語がつく。ちなみに、coma は彗星のしっぽという意味。coma は彗星の頭。もともと髪という意味。

5.2 (p.73) 8 行目 「(a)z_1 におくほうが、(b)z_2^* におくよりも収差が少なくてすむ」、に関連して

SEM では (b) の条件で使っていることもある。弱励磁の時を考慮している。

5.3 (p.75) 図 5.18 のラベルに関して

色収差係数は物理的には負値をとる。しかし、p.282 の 10 行に説明したように負号を外して議論するのが慣習。C_R と C_M についてはラベルに d が抜けているので $C_R d/\tilde{f}_m$ と $C_M d/\tilde{f}_m$ と d を追加する。全て無名数である。式 (5.39) を式 (4.104) を使って計算すると確認できる。

6.1 (p.92) 式 (6.2) から式 (6.3) の変形

式 (6.2) および U の代わりに $\bar{U}$ とした式の両辺に $\bar{U}$ と U をそれぞれかけて、その 2 式の辺々を足すと、

$$U''\bar{U} + U\bar{U}'' + (\frac{\Phi'}{2\Phi})(U'\bar{U} + U\bar{U}') + (\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2)(2U\bar{U}) = 0 \tag{6-1}$$

$$2r(r'' + \frac{1}{4r^3}(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2) + (\frac{\Phi'}{2\Phi})(2rr') + (\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2)(2r^2) = 0 \tag{6-2}$$

$$r'' + (\frac{\Phi'}{2\Phi})r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{4r^4}(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2)\right] r = 0 \tag{6-3}$$

$(U'\bar{U} - U\bar{U}')^2 = (2jr^2(\varphi' - \theta'))^2 = -4r^4(\varphi' - \theta')^2$ なので

$$r'' + (\frac{\Phi'}{2\Phi})r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2 - (\varphi' - \theta')^2\right] r = 0 \tag{6-4}$$

$$r'' + (\frac{\Phi'}{2\Phi})r' + \left[\frac{\Phi'' + \rho/\epsilon_0}{4\Phi} + \frac{e}{8m\Phi}\mathbf{B}^2(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\frac{\mathbf{B}_c^2}{\mathbf{B}^2})\right] r = 0 \tag{6-5}$$

r_c は陰極を出発するときの r、$\mathbf{B}_c$ は陰極面での B_z である。ここで、以下の関係を使った。

式 (5.5) から $r^2(\dot{\varphi} - \omega_L) =$ 一定。陰極で $\dot{\varphi} = 0$ とすると $-r_c^2\omega_c = r^2(\dot{\varphi} - \omega_L)$

$$r(\varphi' - \theta')^2 = (r^2(\dot{\varphi} - \omega_L))^2 \frac{1}{r^3 v^2} = \frac{r_c^4\omega_c^2}{r^3 v^2} = \frac{r_c^4}{r^3 v^2}\frac{e^2\mathbf{B}_c^2}{4m^2} = \frac{\mathbf{B}_c^2 r_c^4}{r^3}\frac{e}{\Phi 8m} \tag{6-6}$$

6.2 (p.92) 式 (6.9) の導出

式 (6.6) で、$u = \sqrt{\ln(R/R_0)}$ と変数変換し、$R_0 = R_m,\ R'_0 = 0$ とおくと、

$$u = \sqrt{\ln(R/R_m)}, \quad u^2 = \ln(R/R_m), \quad 2udu = \frac{dR}{R}, \quad \frac{dR}{u} = 2Rdu. \quad \frac{R}{R_m} = e^{u^2} \tag{6-7}$$

より

$$R'^2 - R_0'^2 = K^2 \ln\frac{R}{R_0} = K^2u^2 \tag{6-8}$$

$$R'^2 = K^2u^2 \tag{6-9}$$

$$R' = Ku,\ \frac{dR}{u} = Kdz \tag{6-10}$$

$$\int_{R_m}^{R} \frac{dr}{u} = \int_{R_m}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\ln(R/R_m)}} = \int_0^z Kdz = Kz \tag{6-11}$$

$$\text{左辺} = \int_0^{\sqrt{\ln R/R_m}} 2Rdu = 2R_m \int_0^{\sqrt{\ln R/R_m}} \frac{R}{R_m}du = 2R_m \int_0^{\sqrt{\ln R/R_m}} e^{u^2}du \tag{6-12}$$

以上より、式 (6.9) が導出された。

$$Kz = \int_{R_m}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\ln(R/R_m)}} = 2R_m \int_0^{\sqrt{\ln R/R_m}} e^{u^2}du \tag{6-13}$$

6.3 (p.96) 式 (6.19) の計算

$\dfrac{D}{2R_m} = x$ とおくと式 (6.19) の右辺 $= \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{u^2}du$

$\sqrt{\ln x} = y$ とおくと、$x = e^{y^2}$であるから、数値計算は$\dfrac{1}{e^{y^2}}\displaystyle\int_0^{y} e^{u^2}du$

に対して行う。この積分値は $y = 0.925$ で極大値 0.5413 を取る。この y の値は、x の値に戻すと 2.35 に相当する。

9.1 (p.138) 式 (9.23) から式 (9.24) への変形

式 (9.23) に $\alpha = \alpha_r\cos\theta,\ \beta = \alpha_r\sin\theta$ を代入し、$\Delta x^2 + \Delta y^2$ を作って θ を 0 から 2π まで積分し、平均し、それの平方根を $\alpha_r^3\tilde{C}$ とおく。つまり実効値をつくる。$\tilde{C}$ が物面で定義されていることに注意し、

$$\alpha_r^3\tilde{C} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((\Delta x/M_x)^2 + (\Delta y/M_y)^2)d\theta} \tag{9-1}$$

ここで、

$$\alpha = \alpha_r\cos\theta,\ \beta = \alpha_r\sin\theta \tag{9-2}$$

$$\Delta x = M_x(\alpha^3C_1 + \alpha\beta^2C_2) = M_x(C_1\alpha_r^3\cos^3\theta + C_2\alpha_r^3\cos\theta\sin^2\theta) \tag{9-3}$$

$$\Delta y = M_y(\beta^3D_1 + \beta\alpha^2C_2) = M_y(D_1\alpha_r^3\sin^3\theta + C_2\alpha_r^3\cos^2\theta\sin\theta) \tag{9-4}$$

を代入して、次の公式 ([6] の p.174)

$$\int_0^{2\pi} \cos^6\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^6\theta d\theta = \frac{5\pi}{8} \tag{9-5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{8} \tag{9-6}$$

を利用して積分を計算する。

$$\int_0^{2\pi} \Delta x^2 d\theta = M_x^2 \alpha_r^6 \left(\frac{5\pi}{8}C_1^2 + \frac{2\pi}{8}C_1C_2 + \frac{\pi}{8}C_2^2\right) \tag{9-7}$$

$$\int_0^{2\pi} \Delta y^2 d\theta = M_y^2 \alpha_r^6 \left(\frac{5\pi}{8}D_1^2 + \frac{2\pi}{8}D_1C_2 + \frac{\pi}{8}C_2^2\right) \tag{9-8}$$

したがって、

$$\tilde{C} = \frac{1}{\alpha_r^3}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((\Delta x/M_x)^2 + (\Delta y/M_y)^2)d\theta} \tag{9-9}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2C_2(C_1 + D_1 + C_2) + 5(C_1^2 + D_1^2)} \tag{9-10}$$

となる。式 (9.24) では C_2 の係数が 2 となっているが、1 が正し値である。9 章参考文献 5) の (15) 式が間違えていると思われる。

11.1 (p.162) 式 (11.18) の近軸軌道方程式の導出

式 (10.4) と同様に導出する。

電界型の時

式 (11.17) の第 2 式で、$B_z = B_r = 0$ とおくと、

$$m\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \text{ より、} r^2\dot{\varphi} = \text{一定} \tag{11-1}$$

これに $r = r_0 + y,\ \dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$ を代入すると、$(r_0 + y)^2(\omega + \dot{\varphi}) =$ 一定。展開すると、

$$r_0^2\omega + 2r_0\omega y + \omega y^2 + r_0^2\dot{\varphi} + 2r_0 y\dot{\varphi} + y^2\dot{\varphi} = \text{一定} \tag{11-2}$$

この式で、0 次項 $r_0^2\omega$ が一定、1 次項 $2r_0\omega y + r_0^2\dot{\varphi}$ を 0、2 次項 $\omega y^2 + 2r_0 y\dot{\varphi} + y^2\dot{\varphi}$ を 0 とおくと、

$$2\omega y + r_0\dot{\varphi} = 0 \tag{11-3}$$

さらに、運動方程式 (11.17) の第 1 式に、$r = r_0 + y,\ \dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$ を代入すると、$\ddot{r} = \ddot{y}$ で、$E_r = E_y = \mathbf{E}_0(1 - ny/r_0)$ を使って、0 次項と 1 次項をまとめると、0 次項は、

$$mr_0\omega^2 = e\mathbf{E}_0 \tag{11-4}$$

1 次項は、

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{n}{r_0}y + 2r_0\omega\dot{\varphi} + \omega^2 y \tag{11-5}$$

(11-3) 式を代入して

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{n}{r_0}y - 3\omega^2 y \tag{11-6}$$

一方、$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{dt^2} = y''v^2 = y''(r_0\omega)^2$ だから

$$y''(r_0\omega)^2 = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{n}{r_0}y - 3\omega^2 y \tag{11-7}$$

(11-4) を使って、

$$y'' = -\frac{3-n}{r_0^2}y = -\left(\frac{\beta_y}{r_0}\right)^2 y,\ \beta_y = \sqrt{3-n} \tag{11-8}$$

となり、式 (11.18) の静電型の場合の β_y が決まる。

また、運動方程式 (11.17) 第 3 式より $m\ddot{z} = -eE_z = -e\mathbf{E}_0(n-1)z/r_0$ で、$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx^2}{dt^2} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2$ だから

$$m\ddot{z} = mz''(r_0\omega)^2 = -eE_z = -e\mathbf{E}_0(n-1)z/r_0 \tag{11-9}$$

式 (11-4) を使って

$$z'' = -\frac{e\mathbf{E}_0}{mr_0\omega}^2\frac{n-1}{r_0^2}z = -\frac{n-1}{r_0^2}z = -\left(\frac{\beta_z}{r_0}\right)^2 z,\ \beta_z = \sqrt{n-1} \tag{11-10}$$

となり、静電型の場合の式 (11.18) の β_z が決まる。

磁界型の場合

運動方程式 (11.17) の第 1 式 $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -er\dot{\varphi}B_z$ を使って、0 次項は $\ddot{r} = 0$ とおくと

$$mr\dot{\varphi}^2 = er\dot{\varphi}B_z,\ \therefore\ \dot{\varphi} = \omega = \frac{e}{m}B_z = \frac{e}{m}\mathbf{B_0} \tag{11-11}$$

同じ運動方程式に $r = r_0 + y,\ \dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$ を代入して、1 次項をまとめると

$$m\ddot{y} - m(2r_0\omega\dot{\varphi} + \omega^2 y) = -er_0\dot{\varphi}\mathbf{B}_0(-n/r_0)y \tag{11-12}$$

式 (11-11) を使って、$\mathbf{B_0}$ を消すと

$$\ddot{y} = r_0\omega\dot{\varphi} + \omega^2 ny \tag{11-13}$$

次に、運動方程式 (11.17) の第 2 式に、$r = r_0 + y,\ \dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}$ を代入して、1 次項をまとめる。$m\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = er(\dot{r}B_z - \dot{z}B_r)$ で、$\dot{\varphi} = \omega$ を使うと、左辺は、$m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\ddot{\varphi} + 2ry\ddot{\varphi} + y^2\ddot{\varphi})$ となり、1 次項は、$m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\ddot{\varphi})$。一方、左辺の 1 次項は $er_0\dot{y}\mathbf{B}_0$。 よって、

$$m(2r_0\dot{y}\omega + r_0^2\ddot{\varphi}) = er_0\dot{y}\mathbf{B}_0 \tag{11-14}$$

式 (11-11) を使って、

$$r_0\dot{y}\omega + r_0^2\ddot{\varphi} = 0 \tag{11-15}$$

両辺を積分すると、

$$y\omega + r_0\dot{\varphi} = 0\ (y = 0 \text{ で} \dot{\varphi} = 0) \tag{11-16}$$

これを (11-13) に代入すると、

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + \omega^2 ny = -\omega^2(1-n)y = y''(r_0\omega)^2 \tag{11-17}$$

より

$$y'' = -\frac{1-n}{r_0^2}y = -\left(\frac{\beta_y}{r_0}\right)^2 y,\ \beta_y = \sqrt{1-n} \tag{11-18}$$

のとなり、磁界型の場合の式 (11.18) の β_y が求まる。

z については、運動方程式 (11.17) の第 3 式 $m\ddot{z} = -e(-r\dot{\varphi}B_r)$ に $\ddot{z} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2$ と $r = r_0 + y,\ \dot{\varphi} = \omega$ を代入して、式 (11-11) を使って、さらに 2 次項を無視すると

$$\ddot{z} = z''v^2 = z''(r_0\omega)^2 = \frac{e}{m}(r_0+y)\dot{\varphi}(-\mathbf{B}_0 nz/r_0) = -\omega^2 nz \tag{11-19}$$

よって、

$$z'' = -\left(\frac{\beta_z}{r_0}\right)^2 z,\ \beta_z = \sqrt{n} \tag{11-20}$$

となり、磁界型の場合の式 (11.18) の β_z が求まる。

11.2　(p.170) 式 (11.45)〜(11.48) について

偏向歪み収差について

式 (11.45) で $\beta \ll 1$ とおくと

$$\bar{y}_3 - Y_s = \beta^3\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{4}\right) \tag{11-21}$$

となり、$Y_s = L\beta$ であるから、(10.12b) の偏向歪収差

$$Y_s^3\frac{1-\frac{l}{2L}}{2L^2} + Y_s X_s^2\frac{l}{2L^3} \tag{11-22}$$

において、一次元偏向なので $X_s = 0$ とおくと、式 (10.12b) と一致する。

像面湾曲収差について

式 (11.46) で $\beta \ll 1$ とおくと

$$\Delta\bar{y}_3 = \beta^2 y_1'\frac{3L-l}{2} \tag{11-23}$$

は、(10.12b) の像面湾曲収差

$$Y_s^2 y_s'\frac{3-l/L}{2L} \tag{11-24}$$

と一致する。

非点収差について

式 (11.28) 第二式から $A=1,\ B=\beta,\ C=-\tan\beta,\ D=1-\beta\tan\beta,\ p=0,\ q=(L-\ell)/\cos\beta$ を用いると

$$\frac{\Delta x}{r_0} = \frac{z_1}{r_0}(1+\frac{L-\ell}{r_0\cos\beta}(-\tan\beta)) + z_1'(\beta+\frac{L-\ell}{r_0\cos}(1-\beta\tan\beta)) \tag{11-25}$$

ここで $z_1 = -z_1'(L+\ell),\ r_0\sin\beta = 2\ell$ を用いると式 (11.47) が得られる。

式 (11.47) で $\beta \ll 1$ とすると

$$\beta^2\frac{L^2}{2\ell}\left(1-\frac{\ell}{L}+\frac{3}{2}\frac{\ell^2}{L^2}\right) \tag{11-26}$$

となり式 (10.12) の非点収差

$$Y_s^2 x_s'\frac{1-l/L+(2/3)(l/L)^2}{2l} + X_s Y_s y_s'\frac{2}{3l}\left(\frac{l}{L}\right)^2 + Y_s^2 x_s\frac{-1+l/L}{2lL} + X_s Y_s y_s\frac{1}{2L^2} \tag{11-27}$$

で $X_s = x_s = y_s = 0$　とおいたものと一致する。

分散について

$y_1 = y_1' = 0$ と置いて、$\Delta p/p = \delta$ と書くと、(11.28) の $\boldsymbol{M}_y$ で $\alpha = 0,\ \Theta = \beta,\ q = (L-l)/\cos\beta$ なので、y_3 を計算すると

$$y_3 = r_0(1-\cos\beta)\delta + \frac{L-l}{\cos\beta}\delta(\sin\beta + (1-\cos\beta)\tan\beta) \tag{11-28}$$

となる。図 11.16 より $2l = r_0\sin\beta$ であり、(11.46) に代入すると

$$\Delta\bar{y}_3 \sim -\frac{y_3}{\cos\beta} \tag{11-29}$$

$$= -\frac{1}{\cos\beta}\left[r_0(1-\cos\beta)\delta + \frac{L-l}{\cos\beta}\delta(\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta)\right] \tag{11-30}$$

$$= -\frac{1}{\cos\beta}\delta\left[\frac{2l}{\sin\beta}(1-\cos\beta) + \frac{L-l}{\cos\beta}(\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta)\right] \tag{11-31}$$

$$= -\frac{\Delta p}{p}\left[\frac{2l}{\cos\beta\sin\beta}(1-\cos\beta) + \frac{L-l}{\cos^2\beta}(\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta)\right] \tag{11-32}$$

$$= -\frac{\Delta p}{p}\left[\frac{L}{\cos^2\beta}(\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta) + l\left(\frac{2(1-\cos\beta)}{\cos\beta\sin\beta} - \frac{\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta}{\cos^2\beta}\right)\right] \tag{11-33}$$

となり、式 (11.48) が得られる。

あるいは、(11-28) の導出に、式 (11.28) の $\boldsymbol{M}_y$ に $\alpha = 0,\ \Theta = \beta$ を入れて、p.165 の上の式を使っても

$$y_3/r_0 = (1-\cos\beta)\delta + \frac{L-l}{\cos\beta}\delta(\sin\beta+(1-\cos\beta)\tan\beta)) \tag{11-34}$$

が導出できる。

ここで (11.46) の上側の式

$$\Delta\bar{y}_3 = -y_3\left(\frac{1}{\cos\beta} - y_3'\sin\beta\right) \sim -\frac{y_3}{\cos\beta} \tag{11-35}$$

において、y_3, y_3' を一次微少量とすると、第一等式は無意味である。したがって、これは削除する。$\sim$ のついた等式は図 11.16 から明らかである。

12.1　(p.182) 式 (12.15) では全放出電流が V_d の 3 乗で、式 (12.16) では電流密度が V_d の 3/2 乗に比例していることについて

電流密度とそれを積分した全放出電流で V_d に対する依存性が異なるのは、電子の放出面積が V_d に依存していることによる。電子銃表面の電界が軸上 (先端) ほど正方向に強く電流密度も大きいのに対して、先端から周囲になるにつれて電界が弱くなり電流密度も小さくなる。さらに先端から遠いところでは (グリッド電位の影響が強く) 電界は負の方向になり電子が放出されない。つまり、電子銃表面での電流密度は軸上をピークとする分布を持ち、また V_d が小さい (V_g が負に大きい) ほど放出面積は減少する。したがって、全放出電流の方が軸上の電流密度より V_d 依存性が強い。

14.1 (p.224) 式 (14.35) の下の式の導出

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt}\dot{z} = \frac{d}{dt}\frac{1}{t'} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dz}\frac{dz}{dt}\frac{dz}{dz}\frac{1}{t'} = \frac{d^2t}{dz^2}\frac{dz^2}{dt^2}\frac{1}{t'} = -\frac{t''}{t'^2}\frac{1}{t'} \tag{14-1}$$

15.1 (p.236) 式 (15.38) と式 (15.39) の導出

$$x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta \tag{15-1}$$
$$y = X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta \tag{15-2}$$

とおくと

$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)\sin 2\vartheta + XY\cos 2\vartheta \tag{15-3}$$
$$x^2 = X^2\cos^2\vartheta - XY\sin 2\vartheta + Y^2\sin^2\vartheta \tag{15-4}$$
$$y^2 = X^2\sin^2\vartheta + XY\sin 2\vartheta + Y^2\cos^2\vartheta \tag{15-5}$$
$$x' = X'\cos\vartheta - X\vartheta'\sin\vartheta - Y'\sin\vartheta - Y\vartheta'\cos\vartheta = A\cos\vartheta - B\sin\vartheta \tag{15-6}$$
$$y' = X'\sin\vartheta + X\vartheta'\cos\vartheta + Y'\cos\vartheta - Y\vartheta'\sin\vartheta = A\sin\vartheta + B\cos\vartheta \tag{15-7}$$
$$A = X' - Y\vartheta',\ B = X\vartheta' + Y' \text{とおいた} \tag{15-8}$$
$$x'y - xy' = (X'Y - XY') - (X^2 + Y^2)\vartheta' \tag{15-9}$$
$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= A^2\cos^2\vartheta - 2AB\cos\vartheta\sin\vartheta + B^2\sin^2\vartheta \\ &\quad + A^2\sin^2\vartheta + 2AB\cos\vartheta\sin\vartheta + B^2\cos^2\vartheta && (15\text{-}10) \\ &= A^2 + B^2 && (15\text{-}11) \\ &= (X' - Y\vartheta')^2 + (X\vartheta' + Y')^2 && (15\text{-}12) \\ &= (X'^2 + X^2\vartheta'^2) - 2\vartheta'(X'Y - XY') + (Y'^2 + Y^2\vartheta'^2) && (15\text{-}13) \end{aligned}$$

となるから、(15.36) に代入して、

$$F^{(2)}/C\sqrt{2m_0e} = \frac{1}{2}\mathbf{P}(x'^2 + y'^2) + \gamma_4(x'y - xy') + \frac{1}{2}\gamma_1 x^2 + \gamma_2 xy + \frac{1}{2}\gamma_3 y^2 \tag{15-14}$$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\left\{(X'^2 + X^2\vartheta'^2) - 2\vartheta'(X'Y - XY') + (Y'^2 + Y^2\vartheta'^2)\right\} \\ &\quad + \gamma_4\left\{(X'Y - XY') - (X^2 + Y^2)\vartheta'\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma_1\left\{X^2\cos^2\vartheta - XY\sin 2\vartheta + Y^2\sin^2\vartheta\right\} \\ &\quad + \gamma_2\left\{\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)\sin 2\vartheta + XY\cos 2\vartheta\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma_3\left\{X^2\sin^2\vartheta + XY\sin 2\vartheta + Y^2\cos^2\vartheta\right\} && (15\text{-}15) \end{aligned}$$

いま、$XY,\ X'Y,\ XY'$ の項を抜き出すと、

$$-\mathbf{P}\vartheta'(X'Y - XY') + \gamma_4(X'Y - XY') - \frac{1}{2}XY\left((\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta\right) \tag{15-16}$$
$$(-\mathbf{P}\vartheta' + \gamma_4)(X'Y - XY') - \frac{1}{2}XY\left((\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta\right) \tag{15-17}$$

$XY,\ X'Y,\ XY'$ それぞれの係数が 0 とおくと、

$$-\mathbf{P}\vartheta' + \gamma_4 = 0 \tag{15-18}$$
$$(\gamma_1 - \gamma_3)\sin 2\vartheta - 2\gamma_2\cos 2\vartheta = 0 \tag{15-19}$$

(14-19) を整理すると

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \tag{15-20}$$

そして、(14-18) を計算するために ϑ' を求める。(14-20) の両辺を z で微分する。

$$\frac{d}{dz}\tan 2\vartheta = \vartheta'\frac{d}{d\vartheta}\tan 2\vartheta = \vartheta'\frac{2}{\cos^2 2\vartheta} = 2\vartheta'(1 + \tan^2 2\vartheta) = 2\vartheta'(1 + \frac{4\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2}) \tag{15-21}$$
$$\frac{d}{dz}\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} = \frac{2\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - 2\gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2} \tag{15-22}$$
$$\text{ゆえに}\quad \vartheta'(1 + \frac{4\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2}) = \frac{\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')}{(\gamma_1 - \gamma_3)^2} \tag{15-23}$$
$$\vartheta'((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2) = \gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3') \tag{15-24}$$

(14-18) を (14-24) に代入すると

$$\frac{\gamma_4}{\mathbf{P}}((\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2) = \gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3') \tag{15-25}$$
$$\mathbf{P}[\gamma_2'(\gamma_1 - \gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1' - \gamma_3')] = \gamma_4[(\gamma_1 - \gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2] \tag{15-26}$$

式 (15.38) が得られた。

$\boxed{\text{別解}}$

$x + jy = u = e^{j\vartheta}U,\ U = X + jY$ とおくと、

$$x' + jy' = u' = e^{j\vartheta}(j\vartheta' U + U') \tag{15-27}$$
$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= u'\bar{u}' = (j\vartheta' U + U')(-j\vartheta'\bar{U} + \bar{U}') \\ &= U'\bar{U}' + j\vartheta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) + \vartheta'^2 U\bar{U} && (15\text{-}28) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x'y - xy' &= \frac{1}{4j}(u' + \bar{u}')(u - \bar{u}) - \frac{1}{4j}(u + \bar{u})(u' - \bar{u}') \\ &= \frac{1}{4j}(u'u - u'\bar{u} + \bar{u}'u - \bar{u}'\bar{u} - uu' + u\bar{u}' - \bar{u}u' + \bar{u}\bar{u}') \\ &= \frac{-1}{2j}(u'\bar{u} - u\bar{u}') = \frac{-1}{2j}((U' + j\vartheta' U)\bar{U} - U(\bar{U}' - j\vartheta'\bar{U})) \\ &= \frac{-1}{2j}(U'\bar{U} - U\bar{U}') - \vartheta' U\bar{U} && (15\text{-}29) \end{aligned}$$
$$x^2 + y^2 = u\bar{u} = U\bar{U} \tag{15-30}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}(u + \bar{u})^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u\bar{u} + \bar{u}^2) \tag{15-31}$$
$$y^2 = -\frac{1}{4}(u - \bar{u})^2 = -\frac{1}{4}(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2) \tag{15-32}$$
$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(u^2 + \bar{u}^2) = \frac{1}{2}(U^2 e^{2j\vartheta} + \bar{U}^2 e^{-2j\vartheta}) \tag{15-33}$$
$$xy = \frac{1}{4j}(u + \bar{u})(u - \bar{u}) = \frac{1}{4j}(u^2 - \bar{u}^2) = \frac{1}{4j}(U^2 e^{2j\vartheta} - \bar{U}^2 e^{-2j\vartheta}) \tag{15-34}$$

これを用いると式 (15.36) の第 1、2 項は

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(U'\bar{U}' + j\vartheta'(U\bar{U}' - U'\bar{U}) + \vartheta'^2 U\bar{U}) + \frac{-1}{2j}\gamma_4(U'\bar{U} - U\bar{U}') - \gamma_4\vartheta' U\bar{U} \tag{15-35}$$

ここで $(U'\bar{U} - \bar{U}U')$ の係数 $j\mathbf{P}\vartheta'/2 - \gamma_4/(2j)$ がゼロとなるように $\vartheta' = \dfrac{\gamma_4}{\mathbf{P}}$ とおき $(U'\bar{U} - \bar{U}U')$ の項すなわち $(X'Y - XY')$ の項を消すと

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(U'\bar{U}' - \vartheta'^2 U\bar{U}) \tag{15-36}$$

式 (15.36) の第 3 項以下は

$$\frac{1}{2}\gamma_1(\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2-y^2}{2}) + \gamma_2 xy + \gamma_3(\frac{x^2+y^2}{4} - \frac{x^2-y^2}{4}) \tag{15-37}$$

$$= \frac{\gamma_1+\gamma_3}{4}U\bar{U} + \frac{\gamma_1-\gamma_3}{8}(U^2 e^{2j\vartheta} + \bar{U}^2 e^{-2j\vartheta}) + \frac{\gamma_2}{4j}(U^2 e^{2j\vartheta} - \bar{U}^2 e^{-2j\vartheta}) \tag{15-38}$$

$$= \frac{\gamma_1+\gamma_3}{4}U\bar{U} + \frac{\gamma_1-\gamma_3}{8}(U^2(\cos 2\vartheta + j\sin 2\vartheta) + \bar{U}^2(\cos 2\vartheta - j\sin 2\vartheta)) \tag{15-39}$$

$$+\frac{\gamma_2}{4j}(U^2(\cos 2\vartheta + j\sin 2\vartheta) - \bar{U}^2(\cos 2\vartheta - j\sin 2\vartheta)) \tag{15-40}$$

$$= \frac{\gamma_1+\gamma_3}{4}U\bar{U} + (U^2 + \bar{U}^2)(\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8}\cos 2\vartheta + j\frac{\gamma_2}{4}\sin 2\vartheta) \tag{15-41}$$

$$+j(U^2 - \bar{U}^2)(\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8}\sin 2\vartheta - \frac{\gamma_2}{4}\cos 2\vartheta) \tag{15-42}$$

変換後の XY 項を消すには $(U^2 - \bar{U}^2)$ の項を消せばよい。すなわち、

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \tag{15-43}$$

これが式 (15.38) 第 2 式。以上をまとめて、直交条件を満たすとき、式 (15.36) を座標 (X, Y) で表現すると

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(X'^2 + Y'^2 - \vartheta'^2(X^2+Y^2)) + \frac{\gamma_1+\gamma_3}{4}(X^2+Y^2) + 2(X^2-Y^2)(\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8}\cos 2\vartheta + \frac{\gamma_2}{4}\sin 2\vartheta) \tag{15-44}$$

式 (14-43) から $\vartheta = \dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{2\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_3})$ を z で微分すると

$$\vartheta' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+4\gamma_2^2/(\gamma_1-\gamma_3)^2}\left(\frac{2\gamma_2'}{\gamma_1-\gamma_3} - \frac{2\gamma_2(\gamma_1'-\gamma_3')}{(\gamma_1-\gamma_3)^2}\right) = \frac{\gamma_2'(\gamma_1-\gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1'-\gamma_3')}{(\gamma_1-\gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2} \tag{15-45}$$

これは式 (14-36) から $\dfrac{\gamma_4}{P}$ に等しい。すなわち、

$$\mathbf{P}(\gamma_2'(\gamma_1-\gamma_3) - \gamma_2(\gamma_1'-\gamma_3')) = \gamma_4((\gamma_1-\gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2) \tag{15-46}$$

式 (15.38) の第 1 式となる。

式 (14-43) を用いると、(14-41) の第 2 項の $(U^2 - \bar{U}^2)$ の係数は

$$(\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8})\cos 2\vartheta + \frac{\gamma_2}{4}\sin 2\vartheta = (\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8})\cos 2\vartheta + (\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8})\tan 2\vartheta \sin 2\vartheta \tag{15-47}$$

$$= (\frac{\gamma_1-\gamma_3}{8\cos 2\vartheta}) \tag{15-48}$$

$$\frac{1}{\cos 2\vartheta} = \sqrt{1+\tan^2 2\vartheta} = \frac{\sqrt{(\gamma_1-\gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2}}{\gamma_1-\gamma_3} \tag{15-49}$$

これらから、式 (15.36) に直交条件を入れた (14-44) は

$$F^{(2)} = \frac{\mathbf{P}}{2}(X'^2 + Y'^2) + \frac{1}{2}(X^2+Y^2)(-\frac{\gamma_4}{\mathbf{P}} + \frac{\gamma_1+\gamma_3}{2}) \tag{15-50}$$

$$+\frac{1}{4}(X^2 - Y^2)\sqrt{(\gamma_1-\gamma_3)^2 + 4\gamma_2^2} \tag{15-51}$$

となり、式 (15.39) が得られる。

15.2 (p.237) 式 (15.44) から式 (15.45) への導出

$$\omega = X^* + jY^* = \mathbf{P}^{1/2}(X + jY) = \Phi^{*1/4}U \tag{15-52}$$

$$U = (\Phi^*)^{-1/4}w \tag{15-53}$$

$$U' = -(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}w + (\Phi^*)^{-1/4}w' \tag{15-54}$$

$$U'\bar{U}' = \left(-(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}w + (\Phi^*)^{-1/4}w'\right)\left(-(1/4)\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{5/4}}\bar{w} + (\Phi^*)^{-1/4}\bar{w}'\right) \tag{15-55}$$

$$= \frac{1}{16}\frac{(\Phi^*)'^2}{(\Phi^*)^{5/2}}w\bar{w} - \frac{1}{4}\frac{(\Phi^*)'}{(\Phi^*)^{3/2}}(w'\bar{w} + w\bar{w}') + \frac{1}{(\Phi^*)^{1/2}}w'\bar{w}' \tag{15-56}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Phi^*}}\left\{\frac{1}{16}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2 w\bar{w} - \frac{1}{4}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)(w\bar{w})' + w'\bar{w}'\right\} \tag{15-57}$$

$$U\bar{U} = (\Phi^*)^{-1/4}w(\Phi^*)^{-1/4}\bar{w} = \Phi^{*-1/2}w\bar{w} \tag{15-58}$$

これらを式 (15.44) に代入すると

$$F^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2 w\bar{w} - \frac{1}{4}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)(w\bar{w})' + w'\bar{w}'\right]$$

$$-w\bar{w}\left[\frac{1}{8}\frac{\Phi''(1+2\epsilon\Phi)}{\Phi^*} + \frac{e\boldsymbol{B}^2}{16m_0\Phi^*}\right] \tag{15-59}$$

$$= \frac{1}{2}w'\bar{w}' + w\bar{w}\left[-\frac{3}{32}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2 - \frac{\epsilon\Phi\Phi''}{4\Phi^*} - \frac{e\boldsymbol{B}^2}{16m_0\Phi^*}\right] \tag{15-60}$$

$$= \frac{1}{2}w'\bar{w}' + w\bar{w}\left[-\frac{3}{32}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2 - \frac{4\epsilon\Phi^*}{32}\frac{2\Phi\Phi''}{\Phi^{*\prime 2}}\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2 - \frac{e\boldsymbol{B}^2}{16m_0\Phi^*}\right] \tag{15-61}$$

となります。(14-59) から (14-60) へは、最初の [ ] の第 2 項で、(15.42) の上の部分積分の手法で、

$$\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)(w\bar{w})' \to -\left(\frac{\Phi^{*\prime}}{\Phi^*}\right)'(w\bar{w}) = \left[-\frac{(\Phi^*)''}{\Phi^*} + \left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)^2\right]w\bar{w} \tag{15-62}$$

$\left(\frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}\right)$ が積分の外に出るので軌道方程式に寄与しないということを利用した。

ところで (14-61) 式の [ ] 内の第 2 項中の $2\Phi\Phi''/\Phi^{*\prime 2}$ が 1 になれば (15.45) になります。

別解

電界成分のみを考察

式 (15.42) において $\Gamma_X = \frac{1}{4}\frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\mathbf{P}}$ を代入すると、

$$\beta_X^2 = \frac{1}{4}\frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{\mathbf{P}^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathbf{P}'}{\mathbf{P}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}''}{\mathbf{P}} \tag{15-63}$$

ここで、

$$\mathbf{P} = \sqrt{\Phi^*} = \sqrt{\Phi(1+\varepsilon\Phi)},\ \mathbf{P}' = \frac{\Phi'(1+2\varepsilon\Phi)}{2\mathbf{P}},\ \mathbf{P}'' = \frac{\Phi''(1+2\varepsilon\Phi)}{2\mathbf{P}} + \frac{\varepsilon\Phi'^2}{\mathbf{P}} - \frac{\mathbf{P}'^2}{\mathbf{P}} \tag{15-64}$$

であるから、(14-63) に代入して、

$$\beta_X^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\mathbf{P}'}{\mathbf{P}}\right)^2 - \frac{\varepsilon\Phi'^2}{2\mathbf{P}^2} = \frac{1}{4\mathbf{P}^2}\left(-2\varepsilon\Phi'^2 + 3\frac{\Phi'^2(1+2\varepsilon\Phi)^2}{4\mathbf{P}^2}\right) \tag{15-65}$$

$$= \frac{\Phi'^2}{16\mathbf{P}^4}(3+4\varepsilon\Phi+4\varepsilon^2\Phi^2) = \frac{\Phi'^2}{16\mathbf{P}^4}(3+4\varepsilon\Phi(1+\varepsilon\Phi)) \tag{15-66}$$

これは (15.45) の電界成分に対応。

16.1　(p.260) (16.17) の導出

$$V_{0c} = \int F^{(4)}dz = \int_{z_{F0}}^{-\infty} F^{(4)}dz + \int_{-\infty}^{\infty} F^{(4)}dz + \int_{\infty}^{z_{Fi}} F^{(4)}dz \tag{16-1}$$

第 1 の積分と第 3 の積分領域では変分関数が $F = \sqrt{\Phi_0}\sqrt{1+X'^2+Y'^2}$ であり、$F^{(4)} = -(\sqrt{\Phi_0}/8)(X'^2+Y'^2)^2$ となる。無電磁界領域であるから、$X'' = Y'' = 0$。これから $(X'^2+Y'^2)^2 = \{(XX'+YY')(X'^2+Y'^2)\}'$ である。

図 1 のように記号を考えると

$$X(z_{Fi}) = f_0X_0',\ X'(z_{Fi}) = -X_0/f_i, \tag{16-2}$$

$$X(z_{Fo}) = X_0,\ X'(z_{Fo}) = X_0' \tag{16-3}$$

$$X(-\infty) = X_0' \lim_{z\to-\infty}(z-z_{Fo}),\ X'(-\infty) = X_0', \tag{16-4}$$

$$X(\infty) = -(X_0/f_i)\lim_{z\to\infty}(z-z_{Fi}),\ X'(\infty) = -X_0/fi \tag{16-5}$$

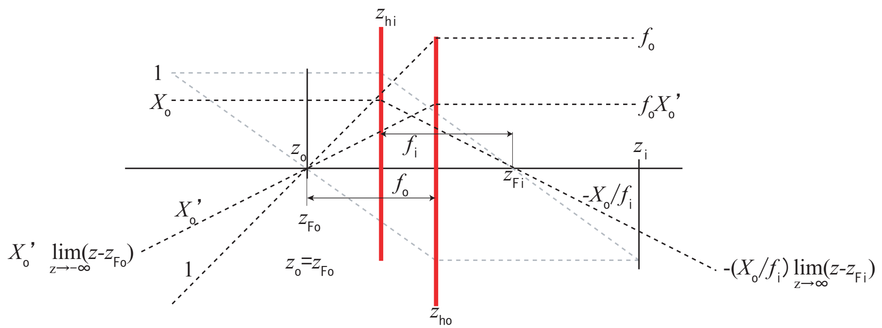

図 1　式 (16.15)∼ 式 (16.17) の文字の説明のための薄肉近似光線図。(参考: 図 4.26)

ここで、(15-2) 式は (16.15) である。

まず、積分範囲 $z_{Fo} \to -\infty$ を考えると

$$\begin{aligned}
&\int_{z_{Fo}}^{-\infty} F^{(4)}dz \\
&= -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8}\left[(XX'+YY')(X'^2+Y'^2)\right]_{z_{Fo}}^{-\infty} \\
&= -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8}\Big[\{X_0' \lim_{z\to-\infty}(z-z_{Fo})X_0' + Y_0' \lim_{z\to-\infty}(z-z_{Fo})Y_0'\}\{X_0'^2+Y_0'^2\} \\
&\quad -\{X_0X_0'+Y_0Y_0'\}\{X_0'^2+Y_0'^2\}\Big] \\
&= -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8}\Big[(X_0'^2+Y_0'^2)^2 \lim_{z\to-\infty}(z-z_{Fo}) - (X_0X_0'+Y_0Y_0')(X_0'^2+Y_0'^2)\Big]
\end{aligned} \tag{16-6}$$

次に積分範囲 $\infty \to z_{Fi}$ を考えると

$$\int_{\infty}^{z_{Fi}} F^{(4)}dz = -\frac{\sqrt{\Phi_i}}{8}\left[(XX'+YY')(X'^2+Y'^2)\right]_{\infty}^{z_{Fi}} \tag{16-7}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{\Phi_i}}{8}\Big[\{(f_0X_0')\frac{-X_0}{f_i} + (f_0Y_0')\frac{-Y_0}{f_i}\}\{\left(\frac{-X_0}{f_i}\right)^2 + \left(\frac{-Y_0}{f_i}\right)^2\} \\
&\quad -\{\frac{-X_0}{f_i}\lim_{z\to\infty}(z-z_{Fi})\frac{-X_0}{f_i} + \frac{-Y_0}{f_i}\lim_{z\to\infty}(z-z_{Fi})\frac{-Y_0}{f_i}\}\{\left(\frac{-X_0}{f_i}\right)^2 + \left(\frac{-Y_0}{f_i}\right)^2\}\Big] \\
&= \frac{\sqrt{\Phi_i}}{8}\Big[\frac{\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{\Phi_i}}(X_0X_0'+Y_0Y_0')\frac{X_0'^2+Y_0'^2}{f_i^2} + \frac{(X_0^2+Y_0^2)^2}{f_i^4}\lim_{z\to\infty}(z-z_{Fi})\Big]
\end{aligned} \tag{16-8}$$

両方範囲の積分をまとめると

$$\begin{aligned}
\int_{z_{Fo}}^{-\infty} F^{(4)}dz + \int_{\infty}^{z_{Fi}} F^{(4)}dz &= \frac{\sqrt{\Phi_0}}{8}(X_0X_0'+Y_0Y_0')\Big(X_0'^2+Y_0'^2+\frac{X_0'^2+Y_0'^2}{f_i^2}\Big) \\
&\quad -\frac{\sqrt{\Phi_0}}{8}(X_0'^2+Y_0'^2)^2\lim_{z\to-\infty}(z-z_{Fo}) + \frac{\sqrt{\Phi_i}}{8}\frac{(X_0^2+Y_0^2)^2}{f_i^4}\lim_{z\to\infty}(z-z_{Fi})
\end{aligned} \tag{16-9}$$

となり、式 (16.17) になる。

16.2　(p.260) 式 (16.20) の導出

$U_0 = X_0 + jY_0,\ \bar{U}_0 = X_0 - jY_0,\ U_0' = X_0' + jY_0',\ \bar{U}_0' = X_0' - jY_0'$ を式 (16.18) に代入して、$r,\ s,\ u,\ v$ を $X_0,\ Y_0,\ X_0',\ Y_0'$ で表して、(16.19) 式に代入して、それを (16.16) に代入する手順で計算する。例えば第 1 項の主要部は

$$\frac{\partial r^2}{\partial X_o} = 2r\frac{\partial r}{\partial X_o} = 2r\frac{2X_o}{f_i^2} = 4\frac{r\xi_o}{f_i}$$

のようになる。

X 成分と Y 成分に対して、$\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0'} + j\frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0'}$ を (16.19) の項毎に計算する。簡単のためやや不正確だが、ここでは $r,\ s,\ u,\ t$ に対して、それぞれ $\frac{\partial r}{\partial X_0} + j\frac{\partial r}{\partial Y_0}$ を r' のように書く事にする。

まず、式 (16.20) の前半の式の導出。

$$r=\frac{U_0\bar{U}_0}{f_i^2}=\frac{(X_0^2+Y_0^2)}{f_i^2},\ s=U_0'\bar{U}_0'=X_0'^2+Y_0'^2,\ \xi_0=\frac{X_0}{f_i},\ \eta_0=\frac{Y_0}{f_i} \tag{16-10}$$

$$u=\frac{\mathrm{Re}(\bar{U}_0U_0')}{f_i}=\xi_0X_0'+\eta_0Y_0'=\frac{X_0X_0'+Y_0Y_0'}{f_i} \tag{16-11}$$

$$v=\frac{\mathrm{Im}(\bar{U}_0U_0')}{f_i}=\xi_0Y_0'-\eta_0X_0'=\frac{X_0Y_0'-X_0'Y_0}{f_i} \tag{16-12}$$

$$r'=\frac{\partial r}{\partial X_0}+j\frac{\partial r}{\partial Y_0}=\frac{(2X_0)}{f_i^2}+j\frac{(2Y_0)}{f_i^2}=2\frac{(X_0+jY_0)}{f_i^2}=2\frac{U_0}{f_i^2} \tag{16-13}$$

$$s'=0,\ u'=\frac{X_0'+jY_0'}{f_i}=\frac{U_0'}{f_i},\ v'=\frac{Y_0'-jX_0'}{f_i}=-j\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-14}$$

$$(r^2)'=2rr'=2r2\frac{U_0}{f_i^2}=4r\frac{U_0}{f_i^2} \tag{16-15}$$

$$(rs)'=r's+rs'=2\frac{U_0}{f_i^2}s \tag{16-16}$$

$$(ru)'=r'u+ru'=2u\frac{U_0}{f_i^2}+r\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-17}$$

$$(rv)'=r'v+rv'=2v\frac{U_0}{f_i^2}-jr\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-18}$$

$$(s^2)'=2ss'=0 \tag{16-19}$$

$$(su)'=s'u+su'=s\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-20}$$

$$(sv)'=s'v+sv'=-js\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-21}$$

$$(u^2)'=2uu'=2u\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-22}$$

$$(uv)'=u'v+uv'=v\frac{U_0'}{f_i}-ju\frac{U_0'}{f_i} \tag{16-23}$$

$$r^2=\frac{(X_0^2+Y_0^2)^2}{f_i^4},\ rs=\frac{(X_0^2+Y_0^2)(X_0'^2+Y_0'^2)}{f_i^2},\ s^2=(X_0'^2+Y_0'^2)^2 \tag{16-24}$$

$$ru=\frac{(X_0^2+Y_0^2)(X_0X_0'+Y_0Y_0')}{f_i^3},\ rv=\frac{(X_0^2+Y_0^2)(X_0Y_0'-X_0'Y_0)}{f_i^3} \tag{16-25}$$

$$su=\frac{(X_0X_0'+Y_0Y_0')(X_0'^2+Y_0'^2)}{f_i},\ sv=\frac{(X_0Y_0'-X_0'Y_0)(X_0'^2+Y_0'^2)}{f_i} \tag{16-26}$$

$$u^2=\frac{(X_0X_0'+Y_0Y_0')^2}{f_i^2},\ uv=\frac{(X_0X_0'+Y_0Y_0')(X_0Y_0'-X_0'Y_0)}{f_i^2} \tag{16-27}$$

$$v^2=rs-u^2 \tag{16-28}$$

$$\frac{f_i}{\sqrt{\Phi_i}}=\frac{f_0}{\sqrt{\Phi_0}}\ \text{つまり}\ \frac{1}{\sqrt{\Phi_i}f_0}=\frac{1}{\sqrt{\Phi_0}f_i}\ \text{また}\ f_0=f_i\rho \tag{16-29}$$

(15-15)–(15-23)、(15-29) と式 (16.16) 第 1 式と式 (16.19) とを使って、式 (16.20a) の前半の形を作る。

$$\begin{aligned}
U^{(3)}(z_{Fi})/M &= \frac{f_0}{M\sqrt{\Phi_0}}\left(\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0}+j\frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0}\right)-\frac{f_0}{2M}(X_0'+jY_0')(X_0'^2+Y_0'^2) && (16\text{-}30)\\
&= \frac{f_i}{M\sqrt{\Phi_i}}\left(\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0}+j\frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0}\right)-\frac{f_0}{2M}U_0'(U_0'\bar{U}_0') && (16\text{-}31)\\
&= \frac{f_i}{M\sqrt{\Phi_i}}\Bigg((2000)4r\frac{U_0}{f_i^2}+(1100)2\frac{U_0}{f_i^2}s+(1010)(2u\frac{U_0}{f_i^2}+r\frac{U_0'}{f_i})\\
&\quad +(1001)(2v\frac{U_0}{f_i^2}-jr\frac{U_0'}{f_i})+(0110)s\frac{U_0'}{f_i}+(0101)s\frac{-j}{f_i}U_0'\\
&\quad +(0020)2u\frac{U_0'}{f_i}+(0011)(v\frac{U_0'}{f_i}-ju\frac{U_0'}{f_i})\Bigg)-\frac{f_0}{2M}U_0's && (16\text{-}32)\\
&= r\frac{1}{M}\left(4(2000)\frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}}+(1010)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}-j(1001)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}\right)\\
&\quad +u\frac{1}{M}\left(2(1010)\frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}}+2(0020)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}-j(0011)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}})\right)\\
&\quad +s\frac{1}{M}\left(2(1100)\frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}}+(0110)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}-\frac{f_0}{2}U_0'-j(0101)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}\right)\\
&\quad +v\frac{1}{M}\left(2(1001)\frac{U_0}{f_i\sqrt{\Phi_i}}+(0011)\frac{U_0'}{\sqrt{\Phi_i}}\right) && (16\text{-}33)
\end{aligned}$$

これから式 (16.20b) と式 (16.20c) の前半が求められる。

$$\begin{aligned}
&Mm_{11}=-\kappa,\ Mm_{12}=\mu-j\psi\rho,\ Mm_{13}=2\mu,\ Mm_{14}=-\pi+j\tau\rho\\
&Mm_{15}=-\lambda,\ Mm_{16}=\xi-\frac{f_0}{2}+j\sigma\rho,\ Mm_{17}=2\psi\rho,\ Mm_{18}=-\tau\rho && (16\text{-}34)
\end{aligned}$$

次に、同様に式 (16.20) の後半の式の導出。ここでは先程と違いやや不正確だが、ここでは $r,\ s,\ u,\ t$ に対して、それぞれ $\frac{\partial r}{\partial X_0'}+j\frac{\partial r}{\partial Y_0'}$ を r' のように書く事にする。

$$r'=0 \tag{16-35}$$

$$s'=2X_0'+j2Y_0'=2U_0' \tag{16-36}$$

$$u'=\frac{1}{f_i}(X_0+jY_0)=\frac{U_0}{f_i} \tag{16-37}$$

$$v'=\frac{1}{f_i}(-Y_0+jX_0)=\frac{jU_0}{f_i} \tag{16-38}$$

$$(2000)(r^2)'=(2000)2rr'=0 \tag{16-39}$$

$$(1100)rs'=(1100)2rU_0' \tag{16-40}$$

$$(1010)ru'=(1010)r\frac{U_0}{f_i} \tag{16-41}$$

$$(1001)rv'=(1001)r\frac{jU_0}{f_i} \tag{16-42}$$

$$(0200)(s^2)'=(0200)2ss'=(0200)4sU_0' \tag{16-43}$$

$$(0110)(su)'=(0110)(s'u+su')=(0110)(2uU_0'+s\frac{U_0}{f_i}) \tag{16-44}$$

$$(0101)(sv)' = (0101)(s'v + sv') = (0101)(2vU_0' + s\frac{jU_0}{f_i}) \tag{16-45}$$

$$(0020)(u^2)' = (0020)2uu' = (0020)2u\frac{U_0}{f_i} \tag{16-46}$$

$$(0011)(uv)' = (0011)(u'v + uv') = (0011)(v\frac{U_0}{f_i} + u\frac{jU_0}{f_i}) \tag{16-47}$$

$$\tag{16-48}$$

これらと式 (16.16) 第 2 式と式 (16.19) を使って

$$U'^{(3)}(z_{Fi}) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}\left(\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0'} + j\frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0'}\right) - \frac{U_0}{2f_i}\frac{U_0\bar{U}_0}{f_i^2} \tag{16-49}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}\left(\frac{\partial V_{0c}}{\partial X_0'} + j\frac{\partial V_{0c}}{\partial Y_0'}\right) - \frac{U_0}{2f_i}r \tag{16-50}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}r\left(U_0\left\{(1010)\frac{1}{f_i} + (1001)\frac{j}{f_i}\right\} + U_0'\{(1100)2\}\right) - \frac{U_0}{2f_i}r \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}u\left(U_0\left\{(0020)2\frac{1}{f_i} + (0011)\frac{j}{f_i}\right\} + U_0'\{(0110)2\}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}s\left(U_0\left\{(0110)\frac{1}{f_i} + (0101)\frac{j}{f_i}\right\} + U_0'\{(0200)4\}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}}\frac{1}{f_i}v\left(U_0\left\{(0011)\frac{1}{f_i}\right\} + U_0'\{(0101)2\}\right)
\end{aligned} \tag{16-51}$$

$$\begin{aligned}
&= r\left(U_0\left\{(1010)\frac{1}{\sqrt{\Phi_i}f_0f_i} + (1001)\frac{j}{\sqrt{\Phi_0}f_i^2} - \frac{1}{2f_i}\right\} + U_0'\left\{(1100)\frac{2}{\sqrt{\Phi_i}f_0}\right\}\right) \\
&\quad + u\left(U_0\left\{(0020)\frac{2}{\sqrt{\Phi_i}f_0f_i} + (0011)\frac{j}{\sqrt{\Phi_0}f_i^2}\right\} + U_0'\left\{(0110)\frac{2}{\sqrt{\Phi_i}f_0}\right\}\right) \\
&\quad + s\left(U_0\left\{(0110)\frac{1}{\sqrt{\Phi_i}f_0f_i} + (0101)\frac{j}{\sqrt{\Phi_0}f_i^2}\right\} + U_0'\left\{(0200)\frac{4}{\sqrt{\Phi_i}f_0}\right\}\right) \\
&\quad + v\left(U_0\left\{(0011)\frac{1}{\sqrt{\Phi_0}f_i^2}\right\} + U_0'\left\{(0101)\frac{2}{\sqrt{\Phi_0}f_i}\right\}\right)
\end{aligned} \tag{16-52}$$

$$\begin{aligned}
&= r\left(U_0\left\{\frac{\mu}{f_0f_i} + \frac{j\psi}{f_i^2} - \frac{1}{2f_i}\right\} + U_0'\left\{\frac{-\lambda}{f_0}\right\}\right) \\
&\quad + u\left(U_0\left\{\frac{-\pi}{f_0f_i} + \frac{-j\tau}{f_i^2}\right\} + U_0'\left\{\frac{2\zeta}{f_0}\right\}\right) \\
&\quad + s\left(U_0\left\{\frac{\zeta}{f_0f_i} + \frac{-j\sigma}{f_i^2}\right\} + U_0'\left\{\frac{-\nu}{f_0}\right\}\right) \\
&\quad + v\left(U_0\left\{\frac{-\tau}{f_i^2}\right\} + U_0'\left\{\frac{-2\sigma}{f_i}\right\}\right)
\end{aligned} \tag{16-53}$$

$$\begin{aligned}
&= r(m_{21}U_0/f_i + m_{22}U_0') + u(m_{23}U_0/f_i + m_{24}U_0') \\
&\quad + s(m_{25}U_0/f_i + m_{26}U_0') + v(m_{27}U_0/f_i + m_{28}U_0')
\end{aligned} \tag{16-54}$$

(15-53) と (15-54) の係数を比較して、(16.20b) の後半の係数を求める。

$$m_{21}/f_i = \frac{\mu}{f_0f_i} + \frac{j\psi}{f_i^2} - \frac{1}{Mf_i} = \frac{1}{f_i^2}\left(\frac{\mu}{\rho} + j\psi - \frac{f_i}{2}\right) = \frac{1}{f_i^2}\left(\frac{M\bar{m}_{12}}{\rho} - \frac{f_i}{2}\right) \tag{16-55}$$

$$\therefore\ f_im_{21} = \frac{M\bar{m}_{12}}{\rho} - \frac{f_i}{2} \tag{16-56}$$

$$m_{22} = \frac{-\lambda}{f_0} = \frac{Mm_{15}}{f_0} = \frac{Mm_{15}}{f_0} = \frac{Mm_{15}}{\rho f_i} \tag{16-57}$$

$$\therefore\ f_im_{22} = \frac{Mm_{15}}{\rho} \tag{16-58}$$

$$m_{23}/f_i = \frac{-\pi}{f_0f_i} + \frac{-j\tau}{f_i^2} = \frac{1}{f_0f_i}(-\pi - j\tau\rho) = \frac{1}{f_0f_i}M\bar{m}_{14} = \frac{1}{\rho f_i^2}M\bar{m}_{14} \tag{16-59}$$

$$\therefore\ f_im_{23} = \frac{M\bar{m}_{14}}{\rho} \tag{16-60}$$

$$m_{24} = \frac{2\zeta}{f_0} = \frac{2\mathrm{Re}(Mm_{16}) + f_0}{f_0} = \frac{2\mathrm{Re}(Mm_{16}) + f_0}{\rho f_i} \tag{16-61}$$

$$\therefore\ f_im_{24} = \frac{2\mathrm{Re}(Mm_{16}) + f_0}{\rho} \tag{16-62}$$

$$m_{25}/f_i = \frac{\zeta}{f_0f_i} + \frac{-j\sigma}{f_i^2} = \frac{1}{f_0f_i}(\zeta - j\sigma\rho) = \frac{1}{\rho f_i^2}\left(M\bar{m}_{16} + \frac{f_0}{2}\right) \tag{16-63}$$

$$\therefore\ f_im_{25} = \frac{1}{\rho}\left(M\bar{m}_{16} + \frac{f_0}{2}\right) \tag{16-64}$$

$$m_{26} = \frac{-\nu}{f_0} = \frac{-\nu}{f_i\rho} \tag{16-65}$$

$$\therefore\ f_im_{26} = \frac{-\nu}{\rho} \tag{16-66}$$

$$m_{27}/f_i = \frac{-\tau}{f_i^2} = \frac{Mm_{18}}{\rho f_i^2} \tag{16-67}$$

$$\therefore\ f_im_{27} = \frac{Mm_{18}}{\rho} \tag{16-68}$$

$$m_{28} = \frac{-2\sigma}{f_i} = \frac{-2\mathrm{Im}(Mm_{16})}{\rho f_i} \tag{16-69}$$

$$\therefore\ f_im_{28} = \frac{-2\mathrm{Im}(Mm_{16})}{\rho} \tag{16-70}$$

となります。

参考文献

[1] 裏　克己, 基礎電磁気学, 共立出版 (1997)

[2] 裏　克己, 進行波管の動作理論に関する研究, 学位論文 (1961) 付録 B

[3] W. Glaser, Elecktronen-Ionen Physik, Handbuch d. Physik, XXXIII, Springer (1956)

[4] P. W. Hawkes and E. Kasper, "Principal of electron optics" Vol. 1, Academic Press, London (1989)

[5] G. H. Jansen, Adv. Electronics and Electron Physics, Suppl, **21**, Chap. 11, Academic Press, London (1989)

[6] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 I, 岩波書店 (1992)

[7] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 II, 岩波書店 (1992)

[8] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波数学公式 III, 岩波書店 (1991)